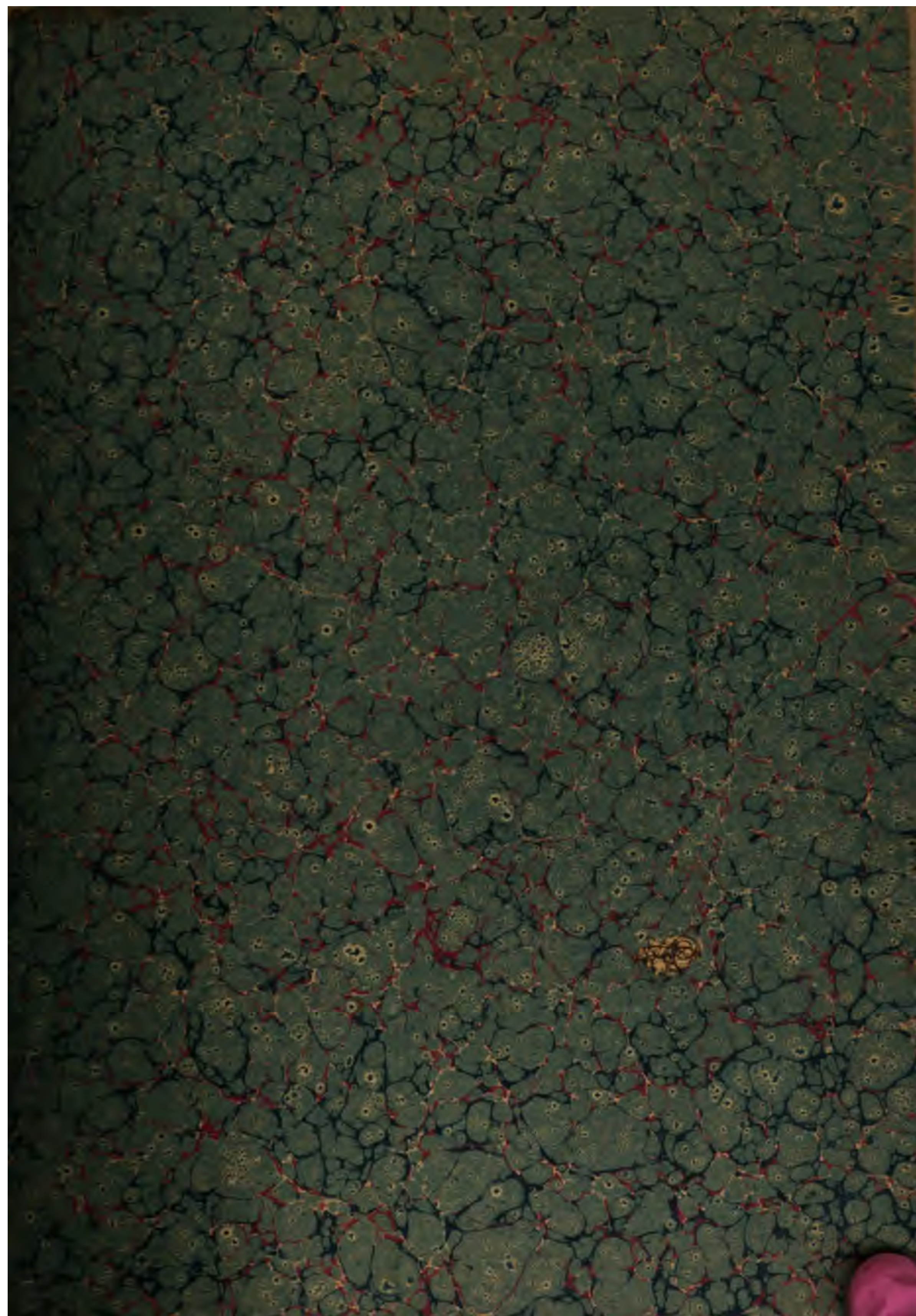


à Monsieur Rossat
chef d'Institution à Charleville
Hommage de l'auteur
[illegible]

ANALYSE DE DESCARTES.

ANALYSE

DE

DESCARTES

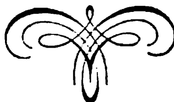
APPLIQUÉE AUX LIGNES DES DEUX PREMIERS ORDRES.

PAR

LÉON LECOINTE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES A L'ATHÉNÉE ROYAL DE NAMUR ;
ANCIEN ÉLÈVE-INGÉNIEUR DES MINES ;
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE ET DES ACADÉMIES
DE RHEIMS ET DE DIJON.

Natura non facit saltus.
ISAAC NEWTON.

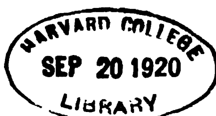


BRUXELLES
AUGUSTE DECQ, LIBRAIRE.

NAMUR
CHEZ L'AUTEUR, ÉDITEUR.

NAMUR
IMPRIMERIE DE ADOLPHE WESMAEL, FILS.

1865.


HARVARD COLLEGE
SEP 20 1920
LIBRARY

Dédicace.

A MES MAITRES :

MM. A. Tyrell, }
N. Ambroisy, } *Capitaines ;*
A. L'hoest, Lieutenant-Colonel d'Artillerie ;

& à

MM. V. Pirson, Colonel honoraire ;
E. Terssen, Major d'Artillerie.

Si, depuis plus de vingt-cinq ans, il m'a été donné de rendre quelques services à l'enseignement public & de concourir au développement scientifique de quelques hommes, c'est à vos précieuses leçons, à celles de feu l'instituteur COQUILHAT & de feu les Majors DAUBRESSE & MARCHAND, ainsi qu'aux encouragements de M. Victor PIRSON & du Major TERSSEN, que

doivent être attribués les succès que j'ai pu obtenir durant cette longue carrière ; car tous vous m'avez aidé & soutenu dans mon rude labeur.

En vous dédiant ce livre, je ne crois pas être quitte envers vous. Je tiens seulement à vous prouver que, malgré plus de cinq lustres écoulés, l'homme reconnaissant se souvient.

L. Lecointe.

Si le lecteur, déjà initié à la science, reconnaît que ces leçons présentent un caractère d'originalité et un ensemble philosophiques qui nous soient propres; et si l'élève, qui

adopte ce travail, y puise facilement les notions de la méthode de DESCARTES, notre but sera atteint.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

Ire LEÇON.

Homogénéité. Théorème. Toute équation établie entre des quantités, sans aucune particularisation d'unités, est homogène. Corol. I, II ; scolie. — Interprétation concrète des signes $+$ et $-$. — **Des lieux géométriques et de leur représentation par la méthode de Descartes.**

IIe LEÇON.

Transformation des coordonnées, Rem. I et II. — **Classification des lieux et de leurs équations. — Théorèmes sur la décomposition d'un lieu.** I. Si une équation entre les coordonnées x et y est de la forme $\varphi(x, y) \times \varphi'(x, y) \times \varphi''(x, y) \times \ldots = 0$, elle a pour expression géométrique toutes les lignes données par $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi'(x, y) = 0$, $\varphi''(x, y) = 0, \ldots$; corol. — II. Toute équation de la forme $[\varphi(x, y)]^{2n} + [\psi(x, y)]^{2m} = 0$, caractérise les points d'intersection des lieux donnés par $\varphi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$. — III. Une droite ne peut couper une ligne algébrique de l'ordre m en plus de m points. Corol. — IV. Si une équation algébrique de l'ordre m, $\varphi(x, y) = 0$, est satisfaite par les coordonnées de plus de m points en ligne droite, cette équation est décomposable en deux facteurs dont l'un est du premier degré et l'autre du degré $m - 1$. — V. Toute équation algébrique homogène en x et y du degré m caractérise m droites passant par l'origine. — VI. Toutes les lignes passant par les points de rencontre de $\varphi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$, sont données, λ étant une constante déterminée *ou* indéterminée, par $\varphi(x, y) + \lambda\psi(x, y) = 0$. — Exercices.

IIIe LEÇON.

De la droite *ou* ligne du premier ordre. — Problèmes I. Étant donnée l'équation d'une droite $y = ax + b$, calculer l'angle que cette droite forme avec l'axe des X positifs. — II. Déterminer l'équation d'une droite en fonction des coordonnées à l'origine. — III. Trouver l'équation de la droite, en fonction de sa distance δ à l'origine et des angles α et β qu'elle forme avec les axes positifs. — IV. Trouver l'équation d'une droite passant par deux points donnés $[x', y']$ et $[x'', y'']$. Rem. I et II. — V. Déterminer l'équation d'une droite passant par un point $[x', y']$ et parallèle à une droite donnée $[y = ax + b]$. — Exercices.

IVe LEÇON.

PROBLÈMES VI. Déterminer le point d'intersection de deux droites. — VII. Trouver la distance entre les deux points $[x', y']$ et $[x'', y'']$. — VIII. Déterminer l'angle de deux droites. — IX. Trouver l'équation de la distance d'un point $[x', y']$ à une droite $[y = ax + b]$ et cette distance elle-même. — X. Déterminer l'équation de la droite passant par un point $[x', y']$ et formant un angle V avec une droite $[y = ax + b]$ donnée. — XI. Former l'équation de la bissectrice de l'angle de deux droites. — XI. Exprimer l'aire d'un triangle, en fonction des coordonnées de ses sommets. — EXERCICES.

Ve LEÇON.

THÉORÈMES I. Dans un triangle, les trois hauteurs se coupent en un même point. — II. Les coordonnées du point milieu d'une droite valent respectivement la demi-somme des cordonnées analogues des points extrêmes. — III. Les médianes d'un triangle se coupent en un même point situé au tiers de chacune d'elles, à partir de la base. — IV. Les perpendiculaires élevées par les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point, centre du cercle circonscrit à ce triangle. — V. Les milieux des quatre côtés d'un quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme. — VI. Le lieu des points à égales distances de deux points donnés, est la médiatrice perpendiculaire à la droite passant par ces deux points. — VII. Le rectangle maximum inscrit dans un triangle, a pour hauteur la moitié de celle du triangle. — VIII. L'équation de la droite passant par le point $[a, b]$ et par l'intersection des droites $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ et $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$, est $\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. — EXERCICES.

VIe LEÇON.

Étude de la formation de l'équation de quelques lieux géométriques. PROBLÈMES I. Une droite Dm, se meut parallèlement à la base OB du triangle OBC. On demande le lieu de l'intersection M, des droites Om et BD. — II. Déterminer le lieu de l'intersection de deux droites tournant, chacune, autour d'un de leurs points; et de telle sorte que les angles qu'elles forment avec la droite des points fixes soient complémentaires. — III. Déterminer le lieu des intersections successives des droites AB, A'B', A''B'',... dont la somme des coordonnées à l'origine est constante et égale à l. — IV. Trouver le lieu du point dont les projections, sur les côtés d'un triangle, sont en ligne droite. — **Théorie générale de la génération analytique d'un lieu.** — EXERCICES.

VIIe LEÇON.

Courbes du second ordre (φ) fermées, ouvertes à une et à deux branches. — Classification des théories générales de ces lieux — (φ) se réduit à un point; à un lieu imaginaire; à deux droites parallèles distinctes, confondues ou imaginaires; à deux droites convergentes; à une fonction du second degré à une seule variable et à une fonction du second degré à deux variables représentant un double lieu rectiligne passant par l'origine. — Réciproques des propriétés précédentes. — EXERCICES.

VIII[e] LEÇON.

De la tangente. — Direction et équation. — Tangente parallèle à un des axes coordonnés; parallèle à une droite donnée, *ou* passant par un point donné. — **Corde des contacts.** — **Tangente commune à deux courbes.** — **Contact de deux courbes.**

IX[e] LEÇON.

De la normale. — Direction et équation. — Normale parallèle à un des axes coordonnés, à une droite donnée *ou* passant par un point donné. — **Hyperbole équilatère du pied des normales.** — **Normale commune à deux courbes.** — **Courbes normales.** — **Qualification d'une droite par rapport à une courbe.** — **Forme de l'équation d'une courbe du second ordre, rapportée à des tangentes égales.** — Exercices.

X[e] LEÇON.

Asymptotisme en général et rectiligne. — Point asymptotique. — Asymptote des courbes du second ordre, déduite de la tangente. — Asymptotes rectangulaires. — Méthode générale de la détermination de l'asymptote.

XI[e] LEÇON.

Asymptote déduite de la sécante. — Asymptotes parallèles à l'un des axes coordonnés. — **Classification des courbes du second ordre, au moyen des asymptotes.** — **Forme de l'équation d'une courbe du second ordre, rapportée à ses asymptotes.** — Exercices.

XII[e] LEÇON.

Des diamètres. — Méthodes de détermination des diamètres. — Les diamètres de la parabole sont parallèles. — Les cordes parallèles aux diamètres du genre $B^2 - AC = 0$ et aux asymptotes de la courbe $B^2 - AC > 0$, n'admettent point de diamètre. — **Diamètres conjugués.** — Les diamètres conjugués passent par un point constant. — Le genre $B^2 - AC = 0$ n'a point de diamètres conjugués.

XIII[e] LEÇON.

Axes *ou* diamètres principaux. — Le genre $B^2 - AC = 0$ n'admet qu'un seul système de cordes principales; et les autres, deux systèmes conjugués. — La circonférence possède une infinité d'axes. — Théorème. La tangente en un point d'une courbe du second ordre, est parallèle aux cordes conjuguées du diamètre du point de contact. Réciproque. — Position des diamètres par rapport à la courbe. — De deux diamètres conjugués de l'hyperbole, un seul coupe la courbe. — Formes diverses de l'équation des courbes du second ordre par rapport aux diamètres et à leurs cordes conjuguées *ou* à deux diamètres conjugués. — Exercices.

XIV[e] LEÇON.

Du centre. — Deux méthodes d'appréciation. — L'équation d'une courbe à centre, rapportée à ce point, pris pour origine, a tous ses termes variables du même degré et récipro-

quement. — Équations du centre. — Application aux courbes du second ordre. — Théorème. Le centre d'une courbe du second ordre ne peut être un de ses points. Corol. — Classification des courbes du second ordre, sous le point de vue du centre. — Exercices.

XVe LEÇON.

De la similitude. — Méthode générale d'appréciation. — Méthode par les centres d'homothétie — Conditions de similitude des courbes du second degré semblables de forme et de position. — Conditions de similitude des courbes semblables de forme, mais non de position. — Les fonctions à deux variables et à un seul paramètre, représentent des courbes semblables

XVIe LEÇON.

Des foyers et des directrices. — Définition d'Euler, de Bret. — Théorème. Chaque foyer détermine une directrice et réciproquement. — Équation focale des courbes du second ordre. — Détermination de deux lieux géométriques donnant les foyers. — Théorèmes I. La connaissance d'un foyer assujetti (φ) à deux conditions. — II. Une directrice astreint la courbe du second ordre, a deux exigences. — III. Le rapport $\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice équivaut à une condition. — IV. Une courbe du second ordre appartient au genre Elliptique, Parabolique ou Hyperbolique, suivant que le rapport précédent donne $\rho \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 1$. — V. Le foyer appartenant à une ligne $f(x, y) = 0$, donne une condition pour (φ). — VI. La directrice tangente à $f(x, y) = 0$, équivaut à une restriction pour (φ). — VII. Deux courbes du second degré seront semblables, pour $\sqrt{\mu'^2 + \nu'^2} = \sqrt{\mu'^2 + \nu'^2}$. Scolies I, II. — Exercices.

XVIIe LEÇON.

Classification générale des courbes du second ordre. — Genres : Elliptique, $(B^2 - AC) < 0$; Parabolique $(B^2 - AC) = 0$ et Hyperbolique $(B^2 - AC > 0)$. — Variétés des genres précédents et leurs caractères analytiques.

XVIIIe LEÇON.

Construction de l'ellipse; exercices. — Construction de l'hyperbole; exercices. — Construction de la parabole; exercices.

XIXe LEÇON.

Formes spéciales de (φ) : $B = 0$; $A = 0$; $A = 0$ et $C = 0$; $A = 0$ et $B = 0$. — Exercices. — **Résumé de la construction des courbes du second ordre.**

XXe LEÇON.

Courbes à centre. — Disparition du rectangle des variables. — Ellipse rapportée à ses axes. Cas particuliers. — Hyperbole rapportée à ses axes; hyperboles conjuguées et hyperbole équilatère. Cas particuliers.

XXIe LEÇON.

Simplification de l'équation de la courbe dépourvue de centre. — Équation la plus simple des trois courbes du second ordre. — Exercices.

XXIIe, XXIIIe, XXIVe ET XXVe LEÇON.

Applications générales sur les courbes du second degré. — Théorèmes I. Ayant tiré une sécante par deux points A et B d'une courbe du second ordre, menez une série de cordes parallèles CD, C'D',... qui coupent la sécante : le rapport du rectangle [CO. OD] des deux segments de chacune des cordes à celui [AO. OB] des segments correspondants de la sécante, sera constant. — II. D'un point O situé sur le plan d'une courbe du second ordre, on trace une sécante OM'M'' : le lieu du point P, harmonique de O par rapport aux deux points M' et M'', est sur la corde de contact des tangentes tracées à la courbe par le point O. — III. D'un point donné sur le plan d'une courbe du second ordre, on trace une sécante. On demande de prouver que l'intersection des tangentes à la courbe par les extrémités de cette sécante, est sur une même droite parallèle aux cordes conjuguées du diamètre passant par le point donné. — IV. La corde des contacts des tangentes menées par tout point d'une droite à une section conique, passe par un point constant situé sur le diamètre des cordes parallèles à la droite donnée. — V. Un point (α, β) sera extérieur *ou* intérieur à une courbe du second ordre, suivant que l'on aura $A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F \gtrless 0$. VI. Si d'un point C pris sur le plan d'un angle YOX, on trace une série de transversales CBA, CB'A',... les diagonales de chaque quadrilatère formé par deux transversales et les droites OX et OY, se coupent en des points M, M',... en ligne droite avec le sommet O de l'angle YOX. Corol. — VII. Par un point situé sur le plan d'une courbe du second ordre, on trace des sécantes OA' A'', OB'B'',... le lieu des points M'', M''',... d'intersection des diagonales A'B'' et A''B', A'D'' et A''D',... est une droite TT' conjuguée du diamètre passant par O et polaire de ce point. — VIII. Si trois courbes du second ordre ont une corde commune, les autres cordes communes à ces courbes, prises deux à deux, se coupent en un même point. — IX. Dans tout hexagone inscrit à une courbe du second ordre, les points d'intersection des côtés opposés, sont en ligne droite. Corol. Problèmes I. Quelle est la courbe du second degré passant par les points (3, 0), (4, 0), (0, 1), (0, 2) (1, 4)? — II. Tracer la courbe du second ordre tangente au point (2, 0) de l'axe des X, à la droite $y = -2x + 1$ et admettant 2 et 3 pour ordonnées à l'origine. — III. Les coordonnées formant l'angle θ, déterminer l'hyperbole équilatère passant par les points $(a, 0)$, $(a', 0)$, $(0, b)$ et $(0, b')$. — IV. Construire graphiquement les intersections de deux courbes concentriques du second ordre, dont une seule est tracée. — V. Étant données les droites DN, DX et un point A situé sur l'une d'elles; chercher le lieu du point M, tel que MA soit égal à la sécante MNP perpendiculaire à DX. — VI. Quelle est la courbe dont chaque ordonnée est moyenne proportionnelle entre celles de deux droites données. — VII. Quel est le lieu décrit par un point d'une droite de longueur constante et dont les extrémités glissent sur deux droites formant un angle donné. — VIII. Trouver le lieu du sommet d'un triangle isocèle dont la base est sur une droite donnée et dont les côtés égaux passent par deux points fixes. — IX. Quel est le lieu des points qui divisent en moyenne et extrême raison, les droites menées par un point donné et comprises entre deux droites fixes? — X. D'un point D donné de position à l'égard de deux droites XX' et YY' formant l'angle θ, tracer une droite DP' telle que la partie interceptée B'P' soit égale à m. — XI. Déterminer le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont des normales à une parabole. — XII. D'un point situé sur l'axe d'une courbe du second ordre, on trace une sécante

quelconque et par le point d'intersection de cette sécante avec la tangente au sommet, on mène une parallèle à l'axe : quel est le lieu du point de rencontre de cette sécante avec la droite qui joint le sommet de la courbe au point où cette dernière est coupée par la parallèle à l'axe? — XIII. Déterminer le lieu du point milieu d'une sécante mené par un point donné à une courbe du second ordre. — XIV. Déterminer le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangents à une courbe du second degré. — **Intersection de deux courbes du second ordre.** — Exercices.

XXVI[e] LEÇON.

De la circonférence. — Formes diverses de l'équation et construction. — Théorèmes. I. Tout diamètre divise le cercle et la circonférence en deux parties égales. — II. L'ordonnée perpendiculaire à un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur le diamètre. — III. Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre mené par une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre. — IV. Tout angle inscrit dans un demi-cercle, est droit. — V. Les angles inscrits dans un même segment, sont égaux; et chacun vaut la moitié de l'angle au centre correspondant. — VI. Si d'un point pris sur le plan d'un cercle, on trace une droite limitée à sa circonférence, le rectangle des segments de cette droite, compris entre le point et la circonférence, sera constant. VII. 1° Deux circonférences ne peuvent se couper en plus de deux points. — 2° Deux cercles se coupant, la distance des centres est normale à la corde des intersections et médiatrice de cette dernière; de plus elle est moindre que la somme des rayons et plus grande que leur différence. — Deux circonférences seront tangentes si la distance des centres vaut la somme ou la différence de leurs rayons. — 4° Deux circonférences n'auront aucun point commun si la distance des centres est plus grande que la somme de leurs rayons ou moindre que leur différence. — VIII. La corde d'intersection d'un cercle donné et d'un cercle variable passant par deux points fixes, coupe la droite de ces derniers points en un même point.

XXVII[e] ET XXVIII[e] LEÇON.

De la tangente à la circonférence : Équation. — Théorème. Tous les points de la tangente, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe. — Tangente par un point extérieur. Cercle et circonférence des contacts. — Axe radical de deux circonférences. — Centre radical de trois circonférences. — Tangente commune à deux circonférences. — **Applications sur le cercle :** Problèmes. I. Quel est le lieu décrit par un point M d'une droite $AB = l$, dont les extrémités glissent sur une circonférence O et sur un de ses diamètres OY. — II. Déterminer le lieu du point dont la somme des carrés des distances à des points donnés, soit constante. — III. Quel est le lieu du point dont la distance à une tangente fixe d'un cercle donné, soit égale à la séparation du pied de cette distance à la circonférence de ce cercle.—IV. Déterminer le lieu du sommet d'un angle dont les côtés tangents à une circonférence (C), déterminent une corde des contacts tangente à une autre circonférence (C'). — V. Quel est le lieu du point à égale distance d'un point et d'une circonférence donnés. — VI. Trouver le lieu du sommet A d'un triangle CAB, dont les deux autres C *et* B glissent sur deux axes rectangulaires OX *et* OY.—VII. Construire le lieu du centre d'un cercle tangent à une droite et à une circonférence données, *ou* le lieu des points à égale distance d'une droite et d'une circonférence tracées. — Exercices.

XXIX[e] LEÇON.

De l'ellipse. Formes diverses de l'équation. — Théorème. Les carrés des ordonnées per-

pendiculaires à un axe, sont entre eux comme les produits des segments qu'elles déterminent sur cet axe. — **Description de l'ellipse :** pointillée, continue, déduite de la projection d'un cercle. — **Des foyers et des directrices :** THÉORÈMES. I. Un point est extérieur *ou* intérieur à l'ellipse suivant que la somme de ses distances aux foyers est plus grande *ou* moindre que le grand axe de la courbe. — II. Le demi-petit axe de l'ellipse est moyen proportionnel entre les deux segments déterminés par chaque foyer sur le grand axe. — PROBLÈME. Quel est le lieu du point dont la somme des distances à deux points fixes est constante et égale à $2a$? — **Description de l'ellipse au moyen des foyers.** — PROBLÈME GÉNÉRAL. Déterminer le lieu dont le rapport des distances à un point et à une droite donnés soit constant *ou* :: m : n.

XXX[e] LEÇON.

Applications sur les foyers et les directrices de l'ellipse : THÉORÈME. I. La corde des extrémités de deux rayons vecteurs, passant par le foyer d'une ellipse, coupe la directrice de ce foyer en un point de la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre. — PROBLÈME. I. Construire la courbe du second ordre, connaissant un foyer et trois de ses points. — THÉORÈME II. Dans une ellipse l'angle formé par un rayon vecteur, passant par le foyer et la parallèle menée à l'axe des foyers, par l'extrémité du rayon vecteur, a pour bissectrice la droite joignant cette extrémité à l'intersection de la tangente au sommet avec la droite joignant le foyer au point où la parallèle coupe la directrice. — PROBLÈME. II. Inscrire un carré dans une ellipse.— **De la tangente.**— Équation.—Inclinaison de la tangente sur les axes de l'ellipse. — THÉORÈMES I. Les points de la tangente à l'ellipse à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe. — II. Les tangentes aux extrémités d'un diamètre de l'ellipse, sont parallèles. — III. Dans l'ellipse, le produit des directions, par rapport à un axe de la courbe, d'une tangente et du diamètre du point de contact, est constant. — IV. La sous-tangente de l'ellipse, par rapport à un axe de la courbe, ne dépend pas que de cet axe. — **Construction de la tangente à l'ellipse :** 1° en un point de la courbe, au moyen de la sous-tangente; 2° par un point extérieur, au moyen des coordonnées analytiques du point de contact et par la corde des contacts; et 3° parallèle à une droite donnée. — **De la normale.** Equation et sous-normale. — **Normale par un point extérieur.** — EXERCICES.

XXXI[e] ET XXXII[e] LEÇON.

Relations angulaires entre la tangente à l'ellipse, la normale et les rayons vecteurs menés du foyer au point de contact. THÉORÈME. La normale de l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs, menés des foyers à un point de la courbe.— **Construction, au moyen des foyers, de la tangente à l'ellipse.—Lieu de la projection des foyers sur la tangente à l'ellipse :** Solution géométrique; solution analytique. — **Construction de la tangente à l'ellipse par un point extérieur à la courbe.** Scolies. — **Applications développées.** THÉORÈMES I. Le rectangle des distances des foyers d'une ellipse à une de ses tangentes, vaut le carré du demi-petit axe. — II. La perpendiculaire élevée par le foyer au rayon vecteur du point de contact d'une tangente à l'ellipse, coupe cette dernière droite en un point situé sur la directrice du foyer considéré.— PROBLÈMES I. Construire l'ellipse dont on connaît : un foyer, la directrice correspondante et une tangente. — II. Construire l'ellipse dont on connaît les foyers et une tangente. — III. Construire l'ellipse connaissant : un foyer, deux tangentes et la direction de l'un des axes. — IV. Circonscrire un carré à une ellipse et déterminer sa surface. — V. Quel est le lieu du pied de la normale,

abaissée d'un point situé sur le petit axe variable d'une ellipse dont le grand axe est constant? — VI. Déterminer le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents à une ellipse donnée. — VII. Chercher le lieu du sommet d'un angle dont les côtés, tangents à une ellipse, déterminent une corde de contact tangente à une ellipse concentrique et dont les axes coïncident en position avec ceux de la première. — EXERCICES.

XXXIIIe LEÇON.

Des diamètres. Équation. — THÉORÈMES I. Dans une ellipse, le produit des directions, par rapport à un axe, d'un diamètre et de sa corde conjuguée, est constant. — II. Les cordes conjuguées d'un diamètre de l'ellipse sont parallèles aux tangentes menées aux extrémités de ce diamètre. — **Diamètres et axes conjugués.** — THÉORÈME. Le produit des directions, par rapport à un axe, de deux diamètres conjugués de l'ellipse, est constant. — **Des cordes supplémentaires ;** THÉORÈMES I. Le produit des directions, par rapport aux axes, de deux cordes supplémentaires, est constant. Réciproques. — II. Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués. — III. L'angle formé par deux diamètres conjugués, a une limite minimum et une autre maximum. — PROBLÈME. Construire deux diamètres conjugués et formant un angle θ. — THÉORÈME IV. Le diamètre du point de contact d'une tangente parallèle à une corde supplémentaire, est parallèle à l'autre corde supplémentaire. — **Applications développées :** THÉORÈME. La perpendiculaire abaissée du foyer de l'ellipse sur une de ses cordes, coupe le diamètre de cette corde sur la directrice de ce foyer. PROBLÈMES I. Construire les foyers d'une courbe à centre du second ordre dont on connaît : le centre, deux points et une directrice. — II. Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés tangents à une ellipse, sont parallèles à deux cordes supplémentaires ou à deux diamètres conjugués? — III. Trouver le lieu de l'intersection des perpendiculaires abaissées des extrémités de l'axe transverse de l'ellipse, sur deux cordes supplémentaires *ou* sur deux diamètres conjugués. — IV. Obtenir le lieu du sommet d'un angle dont un côté est un diamètre de l'ellipse et l'autre sa corde conjuguée passant par le foyer de droite. — EXERCICES.

XXXIVe ET XXXVe LEÇON.

Ellipse rapportée à des diamètres conjugués. — Scolies I, II, III et IV. — Comparaison de l'équation aux axes et aux diamètres conjugués. — **Corde de contacts, pôle et polaire. — Construction de l'ellipse en coordonnées obliques. — Relations entre les axes, les diamètres conjugués et leurs inclinaisons mutuelles.** THÉORÈMES I. Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de l'ellipse est équivalant au rectangle des axes. — II. Dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante et vaut la somme des carrés des axes. — Scolies. — **Applications.** THÉORÈMES I. Les rectangles construits sur les segments de deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués d'une ellipse, sont proportionnels aux carrés des diamètres. — II. La rectangle construit sur les segments d'une tangente à l'ellipse, compris entre le point de contact et deux diamètres conjugués, vaut le carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente. — III. La somme des carrés des perpendiculaires abaissés des origines de deux diamètres conjugués d'une ellipse sur un axe, vaut le carré de l'autre demi-axe; c'est-à-dire que l'on aura $BR^2 + DS^2 = a^2$ et $BP^2 + DQ^2 = b^2$. — IV. Le rectangle des distances aux deux axes de l'origine d'un diamètre de l'ellipse, vaut le rectangle des distances aux mêmes axes de l'origine de son conjugué; c'est-à-dire que l'on aura $BP. BR = DQ. DS$. — PROBLÈMES I. Déterminer l'expression générale de la surface d'un parallélogramme inscrit dans une ellipse; et pour un système de diamètres conjugués

parallèles à ses côtés, quel sera celui maximum. — II. Construire avec la règle et le compas, les intersections d'une droite et d'une ellipse tangente au milieu des quatre côtés d'un parallélogramme. — III. Inscrire un triangle équilatéral dans un ellipse donnée. — IV. Construire la courbe du second ordre connaissant trois tangentes et un foyer. — Exercices.

XXXVI° LEÇON.

De l'hyperbole. Formes diverses de l'équation. — Théorème. Les carrés de ordonnées de l'hyperbole, perpendiculaires à l'axe transverse, sont comme les produits des segments *(soustractifs)* qu'elles déterminent sur cet axe. — Description pointillée de l'hyperbole. — **Des foyers :** Théorèmes I. La différence des distances d'un point de l'hyperbole aux deux foyers, est constante et égale à l'axe transverse $2a$. — Pour un point extérieur *ou* intérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux foyers, est moindre *ou* supérieur à l'axe transverse $2a$. — III. Le demi-axe imaginaire de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les deux segments soustractifs, dans lesquels chacun des foyers divise l'axe transverse.—Problème. Quel est le lieu du point dont la différence des distances à deux points fixes est constante et égale à $2a$. — Construction ponctuée et continue d'une portion d'hyperbole.

XXXVII° ET XXXVIII° LEÇON.

De la tangente : Équation. — Variations de l'inclination de la tangente sur l'axe. — **Asymptotes.** — Théorèmes I. Les points de la tangente à l'hyperbole, à l'exception du point de contact, sont extérieures à la courbe. — II. Aux seules extrémités de l'axe transverse de l'hyperbole, les tangentes sont perpendiculaires aux diamètres du point de contact. — III. Les tangentes aux extrémités d'un diamètre, sont parallèles. — IV. Dans l'hyperbole, le produit des directions, par rapport aux axes, d'une tangente et du diamètre du point de contact, est constant. – **Sous-tangente.** Théorème. La sous-tangente sur un axe de l'hyperbole, est dépendante de cet axe — **Tangente par un point quelconque. Corde des contacts. — De la normale et de la sous-normale.** — Normale par un point quelconque. — Hyperbole équilatère du pied des normales. — **Relations angulaires entre la tangente, les rayons vecteurs et la normale du point de contact.** — Théorème. La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs menés des foyers au point de contact. Corol. — **Construction, par les foyers, de la tangente en un point de l'hyperbole. — Lieu de la projection des foyers de l'hyperbole sur sa tangente. — Construction de la tangente à l'hyperbole par un point extérieur. — Applications :** Théorèmes : I. La projection d'un foyer sur l'asymptote est sur la directrice correspondant à ce foyer. — II. La distance d'un foyer à une asymptote vaut le demi-axe imaginaire. — III. La distance d'un foyer à la projetante de l'autre foyer sur une asymptote, vaut l'axe transverse. — Problème I. Construire l'hyperbole dont on connaît : un foyer, une asymptote et un point. — Théorème IV. Toute portion de parallèle à une asymptote comprise entre la courbe et une directrice, est égale à la distance du foyer correspondant au point où la parallèle rencontre la courbe. — Problèmes II. Construire l'hyperbole dont on donne un point, une directrice et une asymptote. — III. Décrire une hyperbole connaissant un foyer, une tangente et une asymptote. — IV. Inscrire un carré dans une hyperbole. — V. Inscrire dans une hyperbole, un triangle équilatéral dont un côté passe par le centre. — VI. Déterminer le lieu des foyers des courbes du second ordre, concentriques et ayant deux tangentes communes. — VII. Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés sont tangents à une hyperbole et pour lesquels la corde des contacts est tangente à une ellipse ayant en position et en grandeur les mêmes axes que l'hyperbole. — Exercices.

XXXIXe ET XLe LEÇON.

Des diamètres. Equation. — Théorèmes I. Le produit des directions, par rapport à un axe, d'un diamètre de l'hyperbole et de sa corde conjuguée, est constant. — II. Les cordes d'un diamètre de l'hyperbole sont parallèles à la tangente menée par l'extrémité de ce diamètre. — III. De deux diamètres conjugués de l'hyperbole un seul rencontre la courbe. — **Des cordes supplémentaires.** — Théorèmes. I. Le produit des directions, par rapport à un axe, de deux cordes supplémentaires, est constant : Réciproques.—II. Deux cordes supplémentaires de l'hyperbole, sont parallèles à deux diamètres conjugués. — III. L'angle de deux diamètres conjugués de l'hyperbole n'est assujetti à aucune limite. — Problème. Construire deux diamètres conjugués de l'hyperbole et formant un angle θ. — Théorème IV. Le diamètre du point de contact d'une tangente parallèle à une corde supplémentaire, est parallèle à l'autre corde supplémentaire. — Problèmes I. Tracer une tangente parallèle à une droite donnée, 1° par les cordes supplémentaires; 2° par les foyers et l'axe transverse $2a$.— II. Déterminer le centre d'une hyperbole tracée. — **Hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués.** Scolies II. II, III et IV. — Comparaison de l'équation aux axes et aux diamètres conjugués — **Pôle et polaire, corde des contacts. — Construction de l'hyperbole aux diamètres conjugués. — Relations entre les parallélogrammes de deux diamètres conjugués et les carrés de ces derniers.** Théorèmes I. Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués d'une hyperbole, est équivalant au rectangle des axes. — II. La différence des carrés de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, vaut la différence des carrés des axes. — Corollaire. *Dans l'hyperbole équilatère, les diamètres conjugués sont égaux.* — **Applications :** Théorème. Dans deux courbes concentriques du second ordre, dont les axes coïncident en position, la somme des carrés de deux diamètres conjugués de la première, chacun divisé respectivement par le carré du diamètre de la seconde, compris sur la même direction, est une quantité constante. — Problèmes I. Quel est le lieu des extrémités des diamètres imaginaires de l'hyperbole? — II. Déterminer le lieu de l'intersection des tangentes menées à une hyperbole et à sa conjuguée par les extrémités de deux diamètres conjugués. — Exercices.

XLIe LEÇON.

Des asymptotes ; Equation. — Théorèmes I. Toute tangente à l'hyperbole et limitée aux asymptotes est divisée, par le point de contact, en deux parties égales. — II. Les portions de sécantes à l'hyperbole, comprises entre la courbe et les asymptotes, sont égales.—III. Tout demi-diamètre de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les segments déterminés par la courbe et les asymptotes sur la sécante parallèle à ce diamètre. — IV. L'aire du parallélogramme formé par les asymptotes et les parallèles à ces lignes par un point de la courbe, vaut la huitième partie du rectangle des axes, *ou* du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués. — **Hyperbole rapportée à ses asymptotes. — Réciproque. — Tangente aux asymptotes. — Applications.** Théorème. Si par deux points de l'hyperbole on trace des parallèles aux asymptotes, leur point de concours est situé sur le diamètre conjugué de la corde des deux points. — Problèmes I. Décrire une hyperbole connaissant un point et ses asymptotes. — II. Construire l'hyberbole dont on donne trois points et deux parallèles aux asymptotes. — III. Construire une hyperbole connaissant une asymptote, une directrice et l'excentricité. — IV. Construire deux diamètres conjugués de l'hyperbole déterminés par les asymptotes, un point et la direction de l'un de ses diamètres. — V. Construire l'hyperbole dont on donne une asymptote et trois points. — VI. Construire l'hyperbole dont on donne une directrice, une tangente et une asymptote. — Exercices.

XLIIe ET XLIIIe LEÇON.

De la parabole : Équation. — Théorème. Les carrés des ordonnées de la parabole, perpendiculaires à l'axe de la courbe, sont proportionnels aux abscisses correspondantes. — Description pointillée de la courbe. — **Du foyer et de la directrice.** Scolie. La distance d'un point extérieur *ou* intérieur de la parabole à son foyer est supérieure *ou* moindre que la distance de ce point à la directrice. — Problème. Quel est le lieu du point à égale distance d'un point et d'une droite donnés *ou* le lieu du centre des cercles passant par un point et tangents à une droite donnée? **Construction pointillée et continue de la parabole. — Applications.** — Problèmes I. Quel est le lieu du foyer des paraboles, ayant une directrice et un point communs? — II. Construire la parabole dont on connaît deux points et le foyer. — III. Quel est le lieu du sommet des paraboles passant par un point et ayant une même directrice? — IV. Obtenir le lieu du foyer des paraboles ayant même sommet et un point commun. — V. Construire la parabole dont on donne le paramètre, le sommet et un point. — Théorème. Dans toute parabole, la somme *ou* la différence des distances d'un point de la courbe au foyer et à une corde perpendiculaire à l'axe, est constante. Quelle est cette constante? — Exercices.

XLIVe ET XLVe LEÇON.

De la tangente. Équation. — Théorème. Les points de la tangente à la parabole, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe. — **Variations de l'inclinaison de la tangente sur l'axe. — Sous-tangente.** — Théorème. La sous-tangente sur l'axe de la parabole, vaut le double de l'abscisse du point de contact. — Construction de la tangente. — **De la normale.** — Normale par un point quelconque. — **Relations angulaires entre la tangente, les rayons vecteurs du point de contact et la normale.** — Théorème. La normale de la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle à l'axe. — **Construction, par les foyers, de la tangente en un point de la courbe. — Lieu de la projection du foyer de la parabole sur la tangente :** Solution géométrique et analytique. — **Construction de la tangente par un point extérieur.** — Théorème Les tangentes menées à la parabole par un point de la directrice sont perpendiculaires entre elles, et la corde des contacts passe par le foyer de la courbe : solution analytique et géométrique. — **Applications.** Théorème. Les paraboles égales construites sur un même axe et dirigés dans le même sens, sont asymptotes l'une de l'autre. — Problèmes I. Déterminer le lieu de la projection du sommet de la parabole sur ses tangentes. — II. Quel est le lieu du foyer des paraboles ayant même sommet et une tangente commune? — III. Construire la parabole dont on connaît le foyer, une tangente et un point. — IV. Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés tangents à une parabole, déterminent une corde de contact tangente à une seconde parabole dont l'axe coïncident avec celui de la première. — V. Décrire la parabole dont on connaît : la directrice DD', une tangente TT' et son point de contact. — VI. Quel est le lieu du sommet des paraboles ayant une tangente et un foyer communs? — VII. Déterminer le lieu du foyer des paraboles ayant même directrice DD' et une tangente commune TT'. — VIII. Quel est le lieu du sommet des paraboles ayant même directrice et une tangente commune. — IX. On demande le lieu des pieds des normales menées d'un même point à toutes les paraboles ayant même sommet et même axe. — X. Déterminer le lieu du point milieu de la corde de contact des tangentes à une parabole et formant un angle constant V? — XI. Quel est le lieu de la projection du foyer de la parabole sur ses normales? — Exercices.

XLVIe LEÇON.

Des diamètres. — THÉORÈMES I. Dans la parabole, le produit des directions d'un diamètre et de sa corde conjuguée, par rapport à l'axe de la courbe, est constant. *Remarque.*—II. Les cordes d'un diamètre sont parallèles à la tangente menée par l'origine de ce dernier.—**Parabole en coordonnées obliques spéciales. Réciproque. — Pôle et polaire de la parabole. — Construction de la parabole en coordonnées obliques spéciales.** — THÉORÈME. Si d'un point intérieur *ou* extérieur à la parabole, on trace un diamètre et une parallèle à sa corde conjuguée : le rectangle des deux parties de la parallèle, vaut celui du paramètre de ce diamètre et de la distance du point à la courbe, mais comptée sur ce diamètre. — PROBLÈME. Construire la parabole connaissant la direction de l'axe et trois points. — EXERCICES.

XLVIIe LEÇON.

Quadratures et cubatures, — THÉORÈME. L'aire de l'ellipse est égale à celle du cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les demi-axes de l'ellipse.— PROBLÈME. Déterminer le volume donné par l'ellipse tournant autour d'un de ses axes. Quand ce volume est-il maximum? — THÉORÈME. La surface d'un segment hyperbolique a pour mesure le log. (La base dépend de la puissance de l'hyperbole) de l'abscisse du point extrême de l'arc de la portion de courbe considérée. — THÉORÈME. L'aire d'un segment de parabole vaut les deux tiers du parallélogramme construit sur les coordonnées de l'extrémité de l'arc parabolique et avec leur inclinaison mutuelle. — PROBLÈME. Le volume engendré par un segment parabolique, tournant autour de son axe, vaut la moitié du cylindre de même base et de même hauteur. — EXERCICES.

XLVIIIe ET XLIXe LEÇON.

Du cône droit et de ses sections planes. — THÉORÈMES I. Les sections planes du cône droit sont des courbes du second ordre. — II. Toute courbe du second ordre peut se placer sur un cône droit ayant β pour angle générateur. — **Cylindre droit et sa section plane.** — THÉORÈME. La section plane du cylindre droit appartient au genre elliptique. — **2e méthode de détermination pour les sections du cône droit :** I. Ellipse; II. Parabole et III. Hyperbole. — **Du cône oblique et de ses sections planes.** — Section anti-parallèle *ou* sous-contraire du cône. — THÉORÈME. Tout cône oblique donne pour section plane les trois courbes du second ordre.

L^e LEÇON.

Considérations générales sur les coordonnées d'un point. — Coordonnées polaires. — Changement d'axe Polaire et de Pôle. — Transformation des coordonnées rectilignes en cordonnées polaires. — Transformation d'un système polaire en un système rectiligne. — **Applications.** PROBLÈMES I. Déterminer l'équation polaire de la droite en fonction de sa distance à l'origine, pris pour pôle, et de l'angle que cette distance fait avec l'axe des X positifs. (Les axes coordonnés étant rectangulaires). — II. Trouver l'équation polaire de la droite en fonction de l'angle α qu'elle forme avec l'axe polaire et de sa distance δ au pôle. — III Quelle est l'équation polaire de l'hyperbole équilatère, rapportée au centre et à l'axe transverse pour pôle et axe polaire? — IV. Quelle est l'équation polaire de la cissoïde? — V. Déterminer le lieu du point dont le produit des distances à deux points fixes, vaut le carré de la moitié de la distance de ces deux points. — VI. Que représente $\rho = \frac{c}{a \cos. \omega + b \sin. \omega}$? — Quel est le lieu de

l'équation polaire $\rho = a \cos. \omega + b \sin. \omega$? — VIII. Caractérisez la courbe $\rho = \frac{a \cos. \omega}{1 - \sin. 2\omega}$.
IX. Obtenir l'équation polaire de la circonférence. — Exercices.

LIe ET LIIe LEÇON.

Axes polaires de symétrie. — Asymptotes rectilignes en coordonnées polaires. — Circonférence et point asymptotique. — Tangente en coordonnées polaires. — Sous-tangente en coordonnées polaires. — Applications développées. — Problèmes I. Le lieu $\rho = \frac{p}{1 - e \cos. \omega}$ admet-il un axe de symétrie? — II. Quels sont les axes de symétrie de la courbe $\rho = \frac{a}{\sqrt{\sin. \omega}}$? — III. La Lemniscate a-t-elle des axes de symétrie. — IV. Déterminer les axes de $\rho = b \sin. 3\omega + a$. — V. Déterminer les asymptotes de $\rho = \frac{p}{1 - e \cos. \omega}$. — VI. La courbe $\rho = a$ tg. ω a-t-elle des asymptotes? — VII. Déterminer la tangente et la sous-tangente de $\rho = \frac{p}{1 - e \cos. \omega}$. VIII. Quelles sont les particularités d'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur du point de contact de la courbe $\rho = a + \frac{m}{\omega}$? — IX. Déterminer la tangente de la spirale d'Archimède $\rho = \omega$.

LIIIe, LIVe ET LVe LEÇON.

De l'équation polaire des courbes du second ordre : Ellipse, Parabole et Hyperbole; Corollaire. — **Applications.** — Problèmes I. Quel est le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur sa tangente. — II. Déterminer le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur ses normales. — III. Quel est le lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote et un foyer communs. — IV. Étant donnés une droite HK et un point A : on trace les sécantes AM, AN, AP,..... sur lesquelles on porte d'un même côté de HK une longueur constante $MO = NO' = PO'' = ... = l$ ou $M'O = N'O' = P'O'' = ... = l$; quel est le lieu des points M, N, P,... ou M', N', P',..... (Conchoïde de Nicomède)? — V. A partir du centre fixe d'une hyperbole équilatère, les deux parties de l'axe transverse de cette courbe s'enroulent de part et d'autre, sur une circonférence tangente au point milieu de cet axe : Quel est le lieu des positions nouvelles de chaque point de cette hyperbole? — VI. Trouver dans un plan le lieu du point qui reçoit de deux foyers lumineux d'égale intensité, situés dans ce plan, la même quantité totale de lumière que si les deux foyers étaient réunis au milieu de leur distance. — VII. Quel est le lieu décrit par le foyer d'une parabole qui se meut en restant tangente à la droite OX et un même point O? — VIII. Une parabole roule sur une autre parabole fixe identique; quel est le lieu du sommet A' de la parabole mobile, les sommets des courbes étant en contact à l'origine du roulement? — IX. Trouver le lieu décrit par un des foyers d'une hyperbole qui roule sans glissement sur une courbe indentique. L'origine du mouvement sera celui du contact des sommets correspondants — Exercices.

LVIe ET LVIIe LEÇON.

Construction géométrique de expressions algébriques. — Exemples. $x = \sqrt{ab}$; — I. $x = \frac{abcd...}{mnp...}$; — II. $x = c\left(\frac{a}{b}\right)^n$; — III. $x = c\sqrt[2^n]{\frac{a}{b}}$; — IV. $x = a \sin.^n \alpha$; — V.

$x = \frac{a}{\sin.^n \alpha}$; — VI. $x = a \operatorname{tg.}^n \alpha$; — VII. $\operatorname{tg.} x = \frac{ab + cd}{ac - bd}$; VIII. $x = \frac{\sqrt{a^2 + ab} - \sqrt{a^2 - ab}}{2a}$; — IX. $x = \frac{cdef + ghik - lmno}{pqr + stu}$; — X. $x = \sqrt{\frac{abcd}{pq}}$; — XI. $x = \sqrt{ab + cd - ef}$; — XII. $x = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{ab^2 + 2abe + ac}$; — XIII. $x = \sqrt[4]{\frac{2a^5 - 4a^4b + 4a^3b^2 - 4a^2b^3 + 2ab^4}{a + b}}$ — **Application de l'analyse de Descartes à la résolution des équations.** — PROBLÈMES I. Construire les racines de l'équation du second degré. — II. Construire les racines des équations du 4e et du 3e degré. — III. Quelle hauteur faut-il donner à un segment sphérique à une base pour que son volume soit le quart de celui de la sphère? — IV. Insérer deux moyennes proportionnelles entre *a* et *b*. — Déterminer un cube double d'un cube donné. — VI. Diviser un angle en trois parties égales.— **Détermination approximative des racines d'une équation.** — EXERCICES.

LVIIIe, LIXe ET LXe LEÇON.

Analyse des conditions déterminant une ligne. — THÉORÈME. Toute courbe algébrique du degré *m*, exige, en général, $\frac{m(m+3)}{2}$ conditions. — **Limite du nombre de conditions nécessaires à la construction d'une ligne.** — THÉORÈMES I. Si une courbe doit passer par un point, on obtient une relation entre les constantes de son équation *ou* une constante pourra disparaître. — COROLLAIRE. — Deux lignes tangentes déterminent une relation entre les constantes de leurs équations. COROLLAIRES. — III. Une asymptote rectiligne donne deux relations. COROLL. — IV. Tout diamètre donné implique une condition. N. B. Scolie. — V. La connaissance d'un sommet équivaut à deux relations entre les constantes de l'équation de la ligne. — VI. Toute courbe admettant un centre donné, est assujettie à deux conditions. COROLL. — REMARQUE. — PROBLÈMES. I. Par cinq points donnés, on peut faire passer une courbe du second degré et on n'en peut faire passer qu'une. — II. Déterminer la parabole passant par quatre points donnés.— III. Quel est le lieu du centre des courbes du second ordre circonscrites à un triangle et passant par un point donné. N. B.— IV. Quelle est la courbe du second ordre tangentes à deux droites données en des points donnés et passant par un autre point donné COROLLAIRE. — V. Trouver le lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote et un foyer communs. — VI. Trouver le lieu géométrique du foyer des paraboles ayant même directrice et un point commun. — VII. Trouver la courbe du second ordre ayant un foyer commun et passant par trois points donnés. — THÉORÈMES I. Lorsque deux sections coniques sont doublement tangentes à une troisième, deux sécantes communes passent par le point de rencontre des cordes de contact. — II. Si on coupe une courbe du troisième ordre par une droite quelconque $\beta = 0$, les tangentes aux points d'intersection coupent la courbe en des points qui sont en ligne droite. COROLLAIRE. — III. Si on coupe une courbe du quatrième degré par une droite quelconque et qu'aux intersections on mène des tangentes, les huit autres points de rencontre de ces tangentes avec la courbe seront sur une section conique. — EXERCICES,

---

ERRATA. Page 275. **Exercice 4.** Lisez : Tout quadrilatère formé par deux systèmes de cordes supplémentaires, partant des extrémités d'un même diamètre, a, pour seconde diagonale, une parallèle à la tangente menée à l'origine de ce diamètre.

ANALYSE DE DESCARTES.

Ire LEÇON.

SOMMAIRE.

Homogénéité. — Interprétation concrète des signes + et —. — Des lieux géométriques et de leur représentation par la méthode de Descartes.

1. Le géomètre français VIÈTE est le premier qui ait employé l'algèbre pour déterminer les parties inconnues d'une figure plane; mais il était réservé à DESCARTES de fonder la GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, c'est-à-dire de créer une méthode générale capable de ramener la théorie des lignes et des surfaces au calcul algébrique.

La géométrie analytique est dite à *deux* ou à *trois dimensions*, suivant que la figure considérée est *plane* ou située dans *l'espace*. La première sera l'objet de ces leçons.

Homogénéité.

2. Toute idée géométrique, physique ou mécanique, ne pourra évidemment être changée en conception algébrique que pour autant que les diverses grandeurs qui y entrent auront été mesurées au moyen d'unités convenables, *déterminées* ou *indéterminées*, *indépendantes* ou *subordonnées*. Or, cette nécessité donne naissance au principe suivant, base essentielle de toute analyse appliquée à la géométrie.

Toute équation établie entre des quantités, SANS AUCUNE PARTICULARISATION D'UNITÉS, *est homogène.*

En effet, soit

$$A_m + B_n + C_p + \ldots\ldots = 0 \qquad (1)$$

une équation établie entre lignes, les indices indiquant les degrés de chaque partie, et pour laquelle aucune ligne particulière n'a été prise pour unité; on aura

$$m = n = p = \ldots\ldots$$

Car, concevons que l'unité devienne ρ fois plus petite, son caractère d'indétermination étant conservé, chaque facteur du premier degré deviendra ρ fois plus grand, et (1) sera transformée en

$$\rho^m A_m + \rho^n B_n + \rho^p C_p + \ldots\ldots = 0; \qquad (1')$$

et comme (1′) ne peut être différent de (1), le facteur ρ devra disparaître, ce qui exige

$$m = n = p = \ldots\ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRES I. *Si une équation linéaire a été établie en prenant une ligne particulière pour unité, on la rendra indépendante de cette ligne en l'introduisant dans chaque terme à une puissance telle que l'équation soit homogène.*

II. *Si une équation établie entre lignes n'est pas homogène, on pourra la décomposer en plusieurs autres séparément homogènes, lorsque toutefois aucune ligne particulière n'aura été prise pour unité.*

En effet soit

$$A_m + B_n + C_p + \ldots\ldots = 0 \qquad (2)$$

la relation donnée; l'unité primitive et indéterminée étant rendue ρ fois plus petite, (2) devient

$$\rho^m A_m + \rho^n B_n + \rho^p C_p + \ldots\ldots = 0 \qquad (2').$$

Or, l'équation (2′) devant être satisfaite quel que soit ρ, on doit avoir séparément

$$A_m = 0, \quad B_n = 0, \quad C_p = 0, \quad \ldots\ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SCOLIE. Lorsqu'une équation présuppose l'existence de plusieurs unités indépendantes entre elles, la loi d'homogénéité conserve encore son caractère fondamental, seulement avec plus de prescriptions que dans le cas précédent puisqu'il sera essentiel qu'il y ait parité de degré entre tous ses termes ; soit par rapport à l'une quelconque des unités, soit par rapport à plusieurs d'entre elles *ou* à leur

ensemble. Cependant si les unités ont une subordination déterminée, la loi ne subira d'autres modifications que par le mode suivant lequel devra s'estimer le degré de chaque facteur : ainsi, la relation contenant des lignes, des surfaces et des volumes, les facteurs correspondant à ces grandeurs seront respectivement *du premier, du second* et *du troisième degré*.

REMARQUE. Sous le point de vue géométrique, l'homogénéité n'est que l'expression analytique de la loi de similitude.

En effet, une figure géométrique construite à une certaine échelle, peut être traduite à une échelle différente sans cesser de posséder les mêmes propriétés principales; c'est-à-dire celles indépendantes de sa grandeur et ne concernant que sa forme logique. Or, une variation d'échelle correspond évidemment à un changement d'unité, donc *la loi d'homogénéité est traduite synthétiquement par celle de la similitude.*

Enfin, l'homogénéité étant un moyen constant de vérification, un appareil mnémonique pour retenir les formules qui revêtent alors une forme plus symétrique et suggérant parfois des méthodes de calcul plus promptes ou plus élégantes; il est urgent que le lecteur acquière de bonne heure ce qui peut être dénommé *le sentiment de l'homogénéité*, analogue à celui de *la continuité* : tous deux essentiels aux études analytiques appliquées aux conceptions synthétiques.

Interprétation concrète des signes + et —.

3. Les idées de situation se réduisant à la détermination *complète* d'un point, il nous suffira de montrer comment de pures considérations de grandeurs peuvent suffire pour ce cas spécial et cependant général.

Or, il est évident qu'un point situé sur un plan (cette restriction suffisant à ces leçons) se trouverait complètement fixé si, à la condition d'être situé sur une droite tracée sur ce plan et distant d'un point fixe (ORIGINE) d'une longueur donnée, on ajoutait LA DIRECTION suivant laquelle cette longueur doit être portée : ainsi A LA NOTATION de cette direction se borne toute la difficulté de cette détermination; DESCARTES leva cette unique mais grave difficulté par un splendide usage de sa découverte en philosophie mathématique sur la représentation spontanée de l'opposition de sens par l'opposition des signes + et — dans toute relation de l'abstrait au concret, pour toute grandeur qui, comptée sur une direction fixe, COMPORTE UNE INVERSION NETTEMENT CARACTÉRISÉE.

Ainsi, toutes les fois que sur une ligne donnée, on mesurera des distances à partir d'un point fixe (ORIGINE), SI ON AFFECTE CELLES PRISES DANS UN SENS DU SIGNE +, IL FAUDRA AFFECTER LES LONGUEURS PORTÉES EN SENS CONTRAIRE DU SIGNE —.

Ce précepte, base fondamentale de la méthode Cartésienne, n'a encore été que vérifié et ne pourra peut-être jamais être soumis à une appréciation générale; et probablement cela tient à ce qu'il est *sui-généris*. Cependant, quelques esprits ont

voulu faire surgir ce précepte de ce que les quantités positives *ou* négatives ont pour source primitive UN EXCÈS dans lequel la grandeur à soustraire est *moindre* ou *supérieure* à celle dont elle doit être diminuée; mais il est à observer que dans la construction géométrique qui aidait à la conception indiquée, *la quantité négative était portée en sens inverse de celle positive,* c'est-à-dire qu'on admettait *à priori* le précepte.

Quoiqu'il nous faille accepter, quant à présent du moins, la nécessité de la démonstration INDUCTIVE du précepte Cartésien, tout en lui conservant son vrai sens : sens consistant en ce que *toute véritable inversion* dans les grandeurs concrètes, qui en sont susceptibles, se traduit analytiquement par le changement de signe des valeurs abstraites correspondantes; cependant son existence peut être motivée ainsi qu'il suit : Soient O et A deux points fixes sur la ligne XX', et M un point mobile sur cette ligne. En posant OA $= a$, x et x' les distances du point mobile au point O et A, nous aurons



$$x = a + x', \qquad (1)$$

pour la station de M_1 de M à droite de A;

$$x = a - x', \qquad (2)$$

correspondrait à la position M_2 entre O et A; et M en M_3 à gauche de O donnerait

$$x = x' - a. \qquad (3)$$

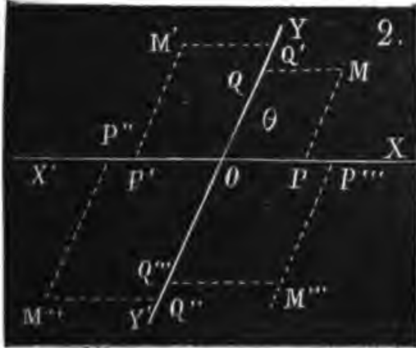
Ainsi trois formules seraient indispensables pour caractériser les diverses situations de M par rapport à l'origine O, tandis qu'une seule suffit en faisant emploi du principe de Descartes; car (1) contient (2) en considérant AM_2 comme NÉGATIF par rapport à AM_1, et (1) remplace également (3) en remarquant que (2) peut être substitué à (3) lorsque x' dépassant a, OM_3 sera considéré NÉGATIVEMENT par rapport à OM_2 ou OM_1.

Cet aperçu éminemment philosophique, est dû à M. Cournot, le savant recteur de l'Académie de Dijon *(De l'origine et des limites de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie).*

Des lieux géométriques.

4. Toute ligne passant par un point donné ou demandé peut être caractérisée du nom de GÉNÉRATRICE de ce point, et on comprend immédiatement que la détermination d'un point exigera au moins la connaissance de DEUX GÉNÉRATRICES de ce point. Donc, si ces deux génératrices ne peuvent admettre chacune qu'*une seule*

grandeur et une seule position. le point n'admettra qu'*un nombre limité* de situations et le problème appartiendra au genre dit : **DÉTERMINÉ**. Si, au contraire, le couple de génératrices peut admettre une infinité de positions, l'ensemble des points communs à chaque couple constituera une ligne *continue* ou *discontinue* qui est appelée **LE LIEU DU POINT DEMANDÉ**.



Ceci posé, afin de passer du simple au composé, examinons le cas où les deux génératrices du point seraient des droites parallèles à deux droites fixes tracées sur le plan contenant le point en question; et soient OX et OY ces dernières droites, dénommées *axes coordonnés*, l'une d'elles OX prend le nom d'*axe des abscisses* ou *des* X et l'autre celui d'*axe des ordonnées* ou *des* Y, et leur point O de rencontre s'appelle communément l'*origine des coordonnées*. Enfin, l'angle θ que forme ces axes est dit l'angle des coordonnées, souvent cet angle **EST DROIT** et les axes sont alors **RECTANGULAIRES** ; dans tout autre cas, ils sont dits **OBLIQUES**.

Maintenant si M est un point situé dans l'angle YOX, il aura les droites PM et QM pour génératrices rectilignes parallèles aux axes coordonnés XX' et YY', tandis que M' admettra P'M' et Q'M', M'' les droites P''M'' et Q''M'', et enfin M''' sera le lieu de l'intersection de P'''M''' et Q'''M'''.

Le lecteur reconnaîtra immédiatement que M et M''' pourraient admettre une génératrice commune et que M et M' *ou* M'' et M''', etc., se trouveraient dans le même cas. Ainsi, toute la difficulté consiste à distinguer les génératrices non communes.

Or, les droites MM''' et M'M'' couperaient alors l'axe des X en des points P et P' situés de part et d'autre de l'origine O des axes et par suite les valeurs numériques de OP et de OP' devraient être affectées de signes contraires; il en sera de même pour les longueurs OQ et OQ'' qui détermineraient la coïncidence de MQM' et M''Q''M'''. Ainsi, si nous affectons du signe + les longueurs portées sur OX et OY à partir du point O, il faudra faire précéder du signe — celles comptées sur OX' et OY'.

On désigne communément par le nom d'*abscisse* la distance OP et par celui d'*ordonnée* la longueur OQ; la première s'appelle encore l'x du point M et l'autre l'y du même point; et leur ensemble prend encore le nom de *coordonnées du point* M.

Il est facile de reconnaître que dans le cas d'*axes rectangulaires*, les coordonnées d'un point ne sont autre chose que les distances de ce point aux axes. Toutefois il est avantageux, pour l'entente philosophique de la géométrie analytique, de laisser

à l'abscisse et à l'ordonnée d'un point leur caractère général ; c'est-à-dire d'ÊTRE LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES GÉNÉRATRICES DE CE POINT.

De ce qui précède, il résulte que 1° pour un point situé dans l'angle

YOX	x et y seront POSITIFS,
Y'OX'	x et y seront NÉGATIFS,
YOX'	x NÉGATIF et y POSITIF.
XOY'	x POSITIF et y NÉGATIF.

2° Tout point situé sur un des axes coordonnés aura 0 (zéro), pour l'autre coordonnée : ainsi sur l'axe des Y, $x = 0$; et $y = 0$, caractérisera un point situé sur la droite des X. 3° Enfin, l'origine aura pour symboles analytiques

$$[x = 0, \quad y = 0].$$

8. Maintenant que nous savons déterminer sans ambiguité la position d'un point sur un plan au moyen de deux génératrices rectilignes parallèles aux axes coordonnés ; concevons une ligne quelconque tracée sur le plan des axes, et que nous ayons mené chaque couple de génératrices déterminant chacun de ses points ; supposons, de plus, qu'il existe entre l'abscisse et l'ordonnée, fixant chacun d'entre eux, une relation constante et de nature à être exprimée algébriquement par une équation ; alors, cette dernière prend le nom d'ÉQUATION DE LA COURBE, et la courbe est aussi dite LE LIEU DE L'ÉQUATION : Ainsi UN LIEU GÉOMÉTRIQUE N'EST AUTRE CHOSE QUE L'ENSEMBLE DE TOUS LES POINTS QUI JOUISSENT D'UNE PROPRIÉTÉ COMMUNE, ET EN GÉNÉRAL, CES POINTS SE SUCCÈDENT SANS DISCONTINUITÉ SELON UNE LIGNE DROITE OU COURBE.

Du reste, en exprimant brièvement cette équation par

$$F\,(x, y, a, b, c, \ldots\ldots) = 0 \qquad (1)$$

(s'énonçant *fonction* de x, y, ...) ; a, b, c étant des quantités constantes, on reconnaît qu'on pourra construire tous les points de la ligne, en donnant successivement à l'une des VARIABLES (dénominations ordinaires de x et de y), x par exemple, toutes les valeurs convenables ; c'est-à-dire susceptibles de donner à l'autre, ici y, des expressions réelles.

La variable à laquelle on attribue une valeur s'appelle *indépendante*, tandis que l'autre variable, qui se déduit de (1), prend la désignation de *dépendante*.

L'équation d'une ligne se met souvent sous la forme

$$(2) \quad y = \varphi\,(x, a, b, \ldots) \quad \text{ou} \quad x = \psi\,(y, a, b, \ldots) \quad (2')$$

qui s'appelle alors *explicite*, tandis que (1) est dite *implicite*.

Enfin, il est utile de faire remarquer, dès à présent, que la courbe (1) ou (2) couperait l'axe des X en des points, caractérisés par le système des équations

$$F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

ou simplement par

$$\varphi(x, a, b, \ldots) = 0\,;$$

et ses intersections, avec l'axe des ordonnées, par

$$F(x, y, a, b, \ldots) = 0 \quad \text{avec} \quad x = 0,$$

ou bien par

$$\psi(y, a, b, \ldots) = 0.$$

De plus, le lieu (1) passerait par l'origine des coordonnées si son équation était vérifiée par

$$[x = 0, \quad y = 0].$$

De ce qui précède, il résulte encore que les points de rencontre de deux courbes sont analytiquement déterminés par la considération simultanée de leurs équations.

6. Nous ne sommes pas encore en possession de tous les éléments nécessaires à la détermination de l'équation d'une ligne connue par quelques-unes de ses propriétés, *ou* de trouver ces dernières connaissant l'équation de la courbe; et cependant déjà nous comprenons toute l'utilité qu'a dû tirer la science de la méthode de Descartes; et, de plus, nous nous apercevons immédiatement que toute difficulté ne pourra provenir que d'une seule question. COMMENT EXPRIMER ANALYTIQUEMENT TELLE OU TELLE PROPRIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE, OU RÉCIPROQUEMENT. La suite de ces leçons nous l'apprendra en partie, et plus tard les calculs transcendants complèteront cette étude.

IIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Transformation de coordonnées. — Classification des lieux et de leurs équations. — Théorèmes concernant la décomposition d'un lieu. — Exercices.

7. Nous avons reconnu qu'une parallèle à l'axe des Y était analytiquement caractérisée par

$$x = a = \textit{constante};$$

et qu'une droite semblablement disposée par rapport à l'axe des X, avait pour expression

$$y = b = \textit{constante}:$$

a et b pouvant être de signes quelconques. Enfin, le lecteur saisira facilement que

$$y = x \quad \text{et} \quad y = -x,$$

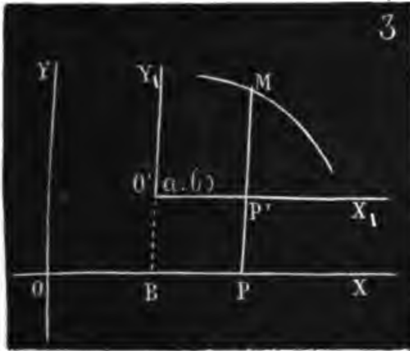
seraient les équations des bissectrices des angles des coordonnées de même signe *ou* de signes contraires; et que sans rien préjuger de la forme de l'équation d'une droite quelconque, on ne pourrait espérer une forme plus simple qu'une des précédentes; aussi allons-nous exposer immédiatement une théorie qui nous permettra de classer les courbes et de déterminer les axes coordonnés auxquels il faut rapporter l'une d'elles pour que son équationsoit la plus simple possible, *ou*, du moins, qu'elle soit plus apte à mettre en évidence certaines de ses propriétés.

Cette théorie est celle de la transformation des coordonnées et a pour but : *Etant donnée l'équation d'une courbe par rapport à un certain système d'axes, trouver sa représentation analytique par rapport à un nouveau système de coordonnées déter-*

minées ou *devant satisfaire à certaines conditions;* et le problème, ainsi posé, se réduit évidemment à *trouver les valeurs des coordonnées anciennes en fonction des nouvelles.*

Nous distinguerons deux cas :

I. — DÉPLACEMENT SIMPLE DE L'ORIGINE, c'est-à-dire les nouveaux axes étant parallèles aux anciens, même sous le point de vue de leurs signes.



Soient OX et OY les anciens axes, OX_1 et OY_1 les nouveaux; *a* et *b* désignant les coordonnées OB, O'B de la nouvelle origine O'; nous aurons, pour les anciennes variables (fig. 3),

$$OP \quad et \quad MP,$$

tandis que les nouvelles seront

$$O'P' \quad et \quad MP'.$$

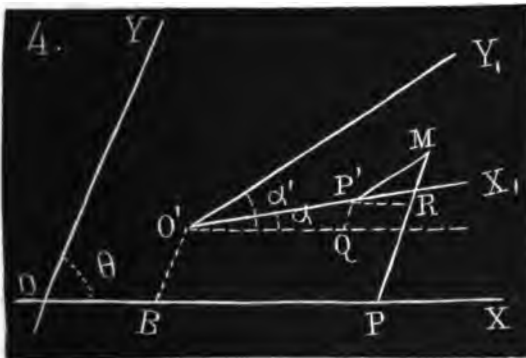
Or, évidemment

$$\left.\begin{array}{l} OP = OB + O'P', \\ MP = O'B + MP', \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} x = a + x', \\ y = b + y'; \end{array}\right.$$

en accentuant les nouvelles coordonnées pour les distinguer des anciennes. Cependant, dans la pratique, on se contente de changer

$$x \text{ en } x + a \quad \text{et} \quad y \text{ en } y + b.$$

II. — DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE ET ALTÉRATION DE LA DIRECTION DES AXES.



Soient OX et OY les anciens axes, $O'X_1$ et $O'Y_1$ les nouveaux, *a* et *b* les coordonnées de la nouvelle origine O', α et α' les angles formés par les axes des X et des Y *positifs nouveaux* avec l'axe des X *positifs anciens* (fig. 4).

Nous avons d'abord

$$x = OP = OB + O'Q + P'R = a + O'Q + P'R \qquad (1),$$
$$y = MP = O'B + P'Q + MR = b + P'Q + MR \qquad (2).$$

Ainsi, tout se réduit à déduire O'Q, P'Q, P'R et MR en fonction de x', y', α, α' et θ; θ désignant l'angle des anciens axes positifs.

Or, d'une part le triangle O'P'Q donne, en accentuant les coordonnées nouvelles,

$$\left.\begin{array}{l}\sin. O'QP' : \sin. O'P'Q :: O'P' : O'Q \\ \sin. O'QP' : \sin. P'O'Q :: O'P' : P'Q\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{ll}\sin.\theta : \sin.(\theta-\alpha) & :: x' : O'Q, \\ \sin.\theta : \sin.\alpha & :: x' : P'Q.\end{array}\right.$$

d'où

$$O'Q = \frac{x' \sin.(\theta-\alpha)}{\sin.\theta} \quad \text{et} \quad P'Q = \frac{x' \sin.\alpha}{\sin.\theta}.$$

D'autre part le triangle MP'R fournit

$$\left.\begin{array}{l}\sin. MRP' : \sin. P'MR :: MP' : P'R \\ \sin. MRP' : \sin. MP'R :: MP' : MR\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{ll}\sin.\theta : \sin.(\theta-\alpha') & :: y' : P'R, \\ \sin.\theta : \sin.\alpha' & :: y' : MR,\end{array}\right.$$

d'où

$$P'R = \frac{y' \sin.(\theta-\alpha')}{\sin.\theta} \quad \text{et} \quad MR = \frac{y' \sin.\alpha'}{\sin.\theta};$$

et par suite les équations (1) et (2) deviennent

$$x = a + \frac{x' \sin.(\theta-\alpha) + y' \sin.(\theta-\alpha')}{\sin.\theta} \quad \text{et} \quad y = b + \frac{x' \sin.\alpha + y' \sin.\alpha'}{\sin.\theta},$$

ou, abréviativement,

$$x = a + \frac{x' \sin.(X_1 Y) + y' \sin.(Y_1 Y)}{\sin.(XY)} \quad \text{et} \quad y = b + \frac{x' \sin.(X_1 X) + y' \sin.(Y_1 X)}{\sin.(XY)}.$$

Telles sont les formules générales pour passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système quelconque et d'origine différente.

8. Voici maintenant ce que deviennent les expressions précédentes dans les cas les plus usités.

I. *L'ancien système est rectangulaire.* Il est évident que tout se réduit à poser $\theta = 90°$, d'où

$$x = a + x' \cos.\alpha + y' \cos.\alpha' \quad \text{et} \quad y = b + x' \sin.\alpha + y' \sin.\alpha',$$

ou

$$x = a + x' \cos.(X_1 X) + y' \cos.(Y_1 X) \quad \text{et} \quad y = b + x' \sin.(X_1 X) + y' \sin.(Y_1 X).$$

II. *Les deux systèmes sont rectangulaires.* Alors $\theta = 90^\circ$ et $\alpha' = 90^\circ + \alpha$; donc

$$x = a + x' \cos. \alpha - y' \sin. \alpha \quad \text{et} \quad y = b + x' \sin. \alpha + y' \cos. \alpha,$$

ou

$$x = a + x' \cos. (X_1X) - y' \sin. (X_1X) \quad \text{et} \quad y = b + x' \sin. (X_1X) + y' \cos. (X_1X).$$

III. *Le nouveau système est seul rectangulaire.* Ainsi $\alpha' = 90^\circ + \alpha$; il vient alors

$$x = a + \frac{x' \sin.(\theta - \alpha) - y' \cos.(\theta - \alpha)}{\sin. \theta} \quad \text{et} \quad y = b + \frac{x' \sin. \alpha + y' \cos. \alpha}{\sin. \theta},$$

ou

$$x = a + \frac{x' \sin.(X_1Y) - y' \cos.(X_1Y)}{\sin. (XY)} \quad \text{et} \quad y = b + \frac{x' \sin.(X_1X) + y' \cos.(X_1X)}{\sin. (XY)}.$$

N. B. Ce dernier cas est peu usité.

8 bis. REMARQUES I. — On comprend facilement que les formules précédentes ne seront générales que pour autant que

1° θ désigne l'angle que forment les anciens axes positifs *ou* négatifs;

2° α et α' peuvent varier de 0° à 360°;

3° a et b expriment *numériquement* et *géométriquement* les coordonnées de la nouvelle origine; c'est-à-dire contiennent leurs signes propres d'après la position de la nouvelle origine, d'après les anciens axes.

II. Les quantités a, b, α et α' qui entrent dans ces formules de transformation sont des constantes fixant la position des nouveaux axes par rapport aux anciens. Ces quatre constantes doivent être regardées comme connues et données à *priori*, toutes les fois qu'on veut rapporter le lieu à de nouveaux axes déterminés; mais il arrive souvent qu'on exécute une substitution de coordonnées, avec le dessein d'introduire un certain changement dans l'équation de la courbe, par ex., de *faire disparaître* certains termes de son équation : dans ce cas a, b, α et α' deviennent des CONSTANTES INDÉTERMINÉES que l'on calcule de telle sorte qu'il en résulte les simplifications exigées. Du reste θ est toujours donné à *priori*, c'est-à-dire qu'on ne peut en disposer.

Enfin, le nombre de termes à faire disparaître indiquera le nombre des indéterminées à introduire et par suite le système de formules dont on doit faire usage. De plus, comme le cas le plus général de transformation n'emploie que *quatre* constantes, on peut dire que *fortuitement*, seulement, plus de *quatre termes* pourront être éliminés.

9. N. B. Plus tard, nous ferons connaître un autre système de génératrices d'un point et qui constitue un mode dit EN COORDONNÉES POLAIRES, tandis que celui dont nous venons de nous occuper prend le nom de COORDONNÉES RECTILIGNES.

Classification des lieux & de leurs équations.

10. Les géomètres ont nécessairement étudié les lignes dans l'ordre où elles se présentaient, ainsi la droite et le cercle se sont offerts spontanément; ensuite les lignes résultant de l'intersection des surfaces par un plan ont surgi naturellement; de là, les sections SPHÉRIQUES, CYLINDRIQUES et CONIQUES, mais comme ces dernières renfermaient celles énoncées précédemment, ils ont dirigé leurs efforts intellectuels sur *les seules sections coniques* qui font l'objet principal de ces leçons. - La méthode de *Descartes* a modifié profondément l'étude des lignes, en les représentant par des équations; aussi est-ce dans ces dernières qu'on les cherche maintenant.

Ceci posé, toute équation

$$\varphi(x,y) = 0$$

est dite ALGÉBRIQUE, lorsque les variables x et y n'y entrent pas en *exposant*, en *logarithmes*, en *lignes trigonométriques* ou *en arcs;* et la courbe qu'elle représente est alors dite ALGÉBRIQUE.

Lorsqu'une équation en x et y n'est pas algébrique, elle est appelée *transcendante* et sa courbe porte le même nom.

11. Les LIGNES ALGÉBRIQUES sont classées d'après le degré en x et y de leurs équations. L'ORDRE de la ligne EST L'EXPOSANT DE CE DEGRÉ; et ce classement est logique, puisque nul changement d'axes coordonnés ne peut altérer ce degré, car les coordonnées anciennes en fonction des nouvelles sont des expressions du premier degré.

REMARQUE. — Il peut arriver dans certains cas qu'une transformation de coordonnées *abaisse le degré par rapport à une des variables*, ainsi

$$x^3 - 3xy + y^3 = 0$$

devient du second degré *seulement* en y, lorsque les axes primitifs étant rectangulaires, on prend pour nouveaux axes les bissectrices des anciens.

N. B. On profite souvent d'un tel abaissement partiel, pour simplifier la résolution de la fonction qui représente un lieu, et par suite la construction de ce dernier.

Théorèmes concernant la décomposition d'un lieu.

THÉORÈME I.

12. *Si une équation entre les coordonnées* x *et* y *est de la forme*

$$\varphi(x, y) \times \varphi'(x, y) \times \varphi''(x, y) \times \ldots\ldots = 0,$$

elle a pour expression géométrique toutes les lignes données par

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \varphi'(x, y) = 0, \quad \varphi''(x, y) = 0, \; .....$$

En effet, chacune des dernières équations vérifie celle proposée.

COROLLAIRE. *Toute équation algébrique a une variable du* $m^{ième}$ *degré, représente* m *droites parallèles à l'axe dont la variable n'entre point dans l'équation.*

Car toute équation algébrique a une inconnue

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \, ... = 0$$

admet m valeurs pour x, et chacune d'elles caractérise une parallèle à l'axe des Y.

N. B. Quelques-unes de ces droites peuvent être imaginaires *ou* se confondre.

THÉORÈME II.

Toute équation de la forme

$$[\varphi(x, y)]^{2m} + [\psi(x, y)]^{2m} = 0,$$

caractérise les points d'intersection des lieux donnés par

$$\varphi(x, y) = 0 \quad et \quad \psi(x, y) = 0.$$

En effet, ces dernières relations sont les seules qui puissent vérifier l'équation proposée.

THÉORÈME III.

Une droite ne peut couper une ligne algébrique de l'ordre m *en plus de* m *points.*

Soit

$$\varphi(x, y) = 0,$$

l'équation de cette courbe rapportée à la droite donnée, prise pour axe des abscisses, on obtiendra les points de rencontre en posant $y = o$: or, l'équation résultante

$$\psi(x) = 0$$

ne pourra être d'un degré plus élevé que m. Donc, x n'admettra au plus que m valeurs réelles dont chacune, prise avec $y = 0$, caractérise un seul point sur l'axe des X.

COROLLAIRE. — *Les équations du premier ordre en* x *et* y *ne peuvent donc représenter que des droites.*

Car les lieux qui en résultent ne peuvent être coupés par une droite en plus d'un point.

THÉORÈME IV.

Si une équation algébrique du degré m

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

est satisfaite par les coordonnées DE PLUS *de* m *points en ligne droite, cette équation est décomposable en deux facteurs dont l'un est du premier degré et l'autre du degré* m — 1.

En effet, si nous prenons cette droite pour axe des X, (1) deviendra

$$\varphi(a + mx + ny, \quad b + m'x + n'y) = 0, \qquad (2)$$

et les points de rencontre avec l'axe des abscisses seront donnés en posant $y = 0$, c'est-à-dire par une relation de la forme

$$\psi(a + mx, \quad b + m'x) = 0$$

du $m^{ième}$ degré au plus; et comme cette équation ne peut donner plus de m valeurs pour x, il faut nécessairement que (2) soit satisfaite quel que soit x, en posant

$$y = 0;$$

c'est-à-dire que (2) est de la forme

$$y \cdot \varphi'(x, y) = 0;$$

d'où, en revenant des nouvelles coordonnées aux anciennes, on obtient

$$(b'_1 + m'_1 x + n'_1 y) \cdot \varphi'[a' + m_1 x + n_1 y, \quad b'_1 + m'_1 x + n'_1 y] = 0$$

pour l'équation (1). C. Q. F. D.

THÉORÈME V.

Toute équation algébrique homogène en x *et* y *du degré* m *caractérise* m *droites passant par l'origine.*

En effet, l'équation proposée sera de la forme

$$Ay^m + Bxy^{m-1} + Cx^2y^{m-2} + \dots \qquad + Kx^m = 0,$$

ou privée du terme indépendant des variables.

Or, on obtient, en divisant par x^m, l'équation

$$A\left(\frac{y}{x}\right)^m + B\left(\frac{y}{x}\right)^{m-1} + C\left(\frac{y}{x}\right)^{m-2} + \dots \qquad + K = 0,$$

admettant m valeurs

$$\frac{y}{x} = a', \quad \frac{y}{x} = a'', \quad \frac{y}{x} = a''', \ldots.$$

d'où

$$y = a'x, \quad y = a''x, \quad y = a'''x, \ldots.;$$

c'est-à-dire des droites *(Théor. III, Corol.)* passant par l'origine, puisque

$$x = 0 \quad \text{donne} \quad y = 0.$$

N. B. Quelques-unes de ces droites peuvent être imaginaires et d'autres se confondre, suivant que des valeurs a', a'',..... sont *imaginaires* ou *égales*.

THÉORÈME VI.

Toutes les lignes passant par les points de rencontre de

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 0,$$

sont données, λ *étant une constante déterminée* ou *indéterminée*, *par*

$$\varphi(x, y) + \lambda\psi(x, y) = 0.$$

En effet, cette dernière relation est vérifiée par les deux premières prises simultanément et caractérise alors leurs points d'intersection. C. Q. F. D.

13. N. B. On ne se borne pas à classer les courbes en ORDRES d'après le degré de leur équation, on cherche encore à les décomposer en GENRES; c'est ainsi que nous reconnaîtrons plus loin que les courbes du second ordre admettent TROIS GENRES distincts caractérisés des noms : I *Elliptique*, II *Hyperbolique* et III *Parabolique;* et que le troisième genre peut être considéré comme étant une dégénérescence de chacun des denx premiers.

Exercices.

I. Construire les points

$$[x=1, y=1]; \ [x=-1, y=2]; \ [x=-1, y=-1] \ \text{et} \ [x=-1, y=+5].$$

II. Que représente

$$x^2+y^2=0; \ x^2-y^2=0; \ x^2+xy=0, \ xy=0; \ n^2+y^2+a^2=0; \ xy-ax=0;$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=0; \ (x-3)^2+(y+5)^2+7=0; \ 3y^2-5xy+y^2=0;$$
$$y^2-4xy+3x^2=0; \ 3y^2-8xy-3x^2+30x+27=0;$$
$$(x-a)(y+b)\,[(x-7)^2+(y+4)^2]=0;$$
$$(x-a)(y-b)=0; \ \text{et} \ [(x-y+a)^2+(x+y-a)^2](x-2)(y+3)=0\,?$$

III. Déterminer l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0,$$

les axes restant parallèles et l'origine se transportant au point (3, — 2).

IV. Faire disparaître les termes du 1er degré de

$$x^2 - 3xy + 5y^2 - 3y + 5x + 1 = 0.$$

V. Que représente

$$y^2 \cos. 2\theta + 2xy \cos. \theta + x^2 = 0?$$

VI. Que devient

$$x^2 + y^2 + xy - 1 = 0,$$

lorsque l'angle des axes de 60° se change en 90° et que l'axe des X reste invariable?

VII. Faire disparaître le rectangle des variables de

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2ly - 2lx + l^2 = 0,$$

les axes restant rectangulaires.

VIII. En déplaçant l'origine, faire disparaître les termes du premier degré de

$$y^2 + xy - 2x^2 - 2y - 2x + 3 = 0.$$

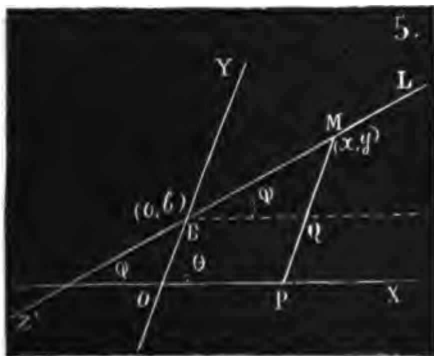
IX. Faire disparaître les carrés des variables de l'équation précédente, en conservant l'origine et changeant la direction des axes; puis éliminer les termes du 1er degré de l'équation transformée par un déplacement d'origine.

IIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

De la droite *ou* ligne du premier ordre. — Problèmes & théorèmes sur la droite & le point. — Exercices.

14. Nous avons déjà reconnu que les lignes du premier ordre ne pouvaient être que des droites; mais, afin de ne laisser aucun doute à ce sujet, nous allons chercher directement l'équation de la droite et passer en revue les diverses formes de cette équation, eu égard aux diverses conditions auxquelles la droite peut être assujettie.



Soit Z'BL une droite déterminée par son intersection B [$x = 0$, $y = b$] avec l'axe des Y et par l'angle α qu'elle forme avec l'axe des X *positifs;* et soient (x, y) les coordonnées d'un point quelconque M de Z'BL, le triangle MBQ donne

MQ : BQ :: sin. MBQ : sin. BMQ *ou* $y - b : x :: \sin.\ \alpha : \sin.\ (\theta - \alpha)$,

d'où

$$y = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (\theta - \alpha)}\, x + b \qquad (1),$$

ou

$$y \sin.\ (\theta - \alpha) - x \sin \alpha - b \sin.\ (\theta - \alpha) = 0;$$

c'est-à-dire que l'équation du premier degré à deux variables

$$Ay + Bx + C = 0 \qquad (2)$$

sera la forme analytique d'une droite.

N. B. On considère ordinairement la forme (1), qui peut s'écrire

$$y = ax + b \qquad (1');$$

alors, la constante a s'appelle ANGULAIRE parce qu'elle a pour valeur LE RAPPORT DES SINUS DES ANGLES FORMÉS PAR LA DROITE AVEC LES AXES DES X ET DES Y POSITIFS, et pour cette raison se dénomme encore DIRECTION de la droite. De plus, dans le cas d'axes rectangulaires, comme on a

$$a = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (\theta - \alpha)} = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha} = \mathrm{tg}.\ \alpha;$$

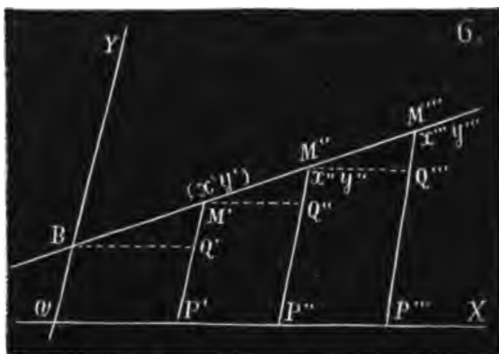
on reconnait que cette direction vaut LA TANGENTE TRIGONOMÉTRIQUE DE L'ANGLE FORMÉ PAR LA DROITE AVEC L'AXE DES ABSCISSES POSITIVES.

Enfin, la constante b prend le nom de LINÉAIRE, comme représentant L'ORDONNÉE A L'ORIGINE DE LA DROITE; c'est-à-dire *la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des* Y.

Ceci posé, nous disons que réciproquement : *tous les points caractérisés par*

$$Ay + Bx + C = 0 \qquad (2)$$

sont en ligne droite.



En effet, donnons à x les valeurs OP' (x'), OP'' (x'') et OP''' (x'''), et soient M'P', M''P'' et M'''P''' les valeurs correspondantes de l'ordonnée; nous en déduirons les points M', M'' et M''' du lieu (2).

Ceci posé, en désignant par α et α' les angles que M'M'' et M''M''' forment avec l'axe des X positifs; nous aurons, d'une part

$$\left.\begin{aligned} \frac{M''Q''}{M'Q''} &= \frac{\sin.\ M''M'Q''}{\sin.\ M'M''Q''}, \\ \frac{M'''Q'''}{M''Q'''} &= \frac{\sin.\ M'''M''Q''}{\sin.\ M''M'''Q'''}, \end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned} \frac{y''-y'}{x''-x'} &= \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (\theta-\alpha)}, \\ \frac{y'''-y''}{x'''-x''} &= \frac{\sin.\ \alpha'}{\sin.\ (\theta-\alpha')}; \end{aligned}\right.$$

et d'autre part, à cause de la situation des points M', M'' et M''',

$$\left.\begin{array}{r} Ay' + Bx' + C = 0, \\ Ay'' + Bx'' + C = 0, \\ Ay''' + Bx''' + C = 0, \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y''-y'}{x''-x'} = -\dfrac{B}{A}, \\ \dfrac{y'''-y''}{x'''-x''} = -\dfrac{B}{A}; \end{array}\right.$$

et par suite

$$\frac{\sin.\,\alpha}{\sin.\,(\theta-\alpha)} = \frac{\sin.\,\alpha'}{\sin.\,(\theta-\alpha')},$$

d'où, en développant et réduisant,

$$\sin.\,\theta \sin.\,(\alpha - \alpha') = 0.$$

Mais sin. θ ne peut être nul, donc

$$\alpha = \alpha' \quad ou \quad \alpha = \alpha' + k\pi;$$

c'est-à-dire que les points M', M'' et M''' sont bien en ligne droite. C. Q. F. D.

COROLLAIRES I. — *L'équation*

$$Ay + Bx = 0 \quad ou \quad y = ax,$$

caractérisera une droite passant par l'origine.

En effet, cette relation est satisfaite par les coordonnées $[x=0,\ y=0]$ de ce point.

II. — *Les équations*

$$Ay + C = 0 \quad et \quad Bx + C = 0,$$

représentent des droites respectivement parallèles à l'axe des X *et à l'axe des* Y.

SCOLIE. *Enfin*

$$Ay + Bx + C = 0 \quad et \quad Ay + Bx + C' = 0,$$

sont deux parallèles.

PROBLÈME I.

Étant donnée l'équation d'une droite

$$y = ax + b,$$

calculer l'angle que cette droite forme avec l'axe des X *positifs.*

Désignons par α l'angle cherché et par θ celui des axes, nous savons que

$$a = \frac{\sin.\,\alpha}{\sin.\,(\theta - \alpha)}, \quad \text{d'où} \quad \text{tg.}\,\alpha = \frac{a \sin.\,\theta}{1 + a \cos.\,\theta}.$$

Cette expression de tg. α n'étant point monôme, ne peut servir au calcul logarithmique; or, on a

$$\text{tg.}\,(\tfrac{1}{2}\theta - \alpha) = \frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}\theta - \text{tg.}\,\alpha}{1 + \text{tg.}\,\frac{1}{2}\theta\ \text{tg.}\,\alpha},$$

d'où, en remplaçant tg. α par sa valeur,

$$\text{tg.}\,(\tfrac{1}{2}\theta - \alpha) = \frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}\theta - a\,(\sin.\,\theta - \cos.\,\theta\ \text{tg.}\,\frac{1}{2}\theta)}{1 + a\,(\cos.\,\theta + \sin.\,\theta\ \text{tg.}\,\frac{1}{2}\theta}\,;$$

mais on a

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\theta &= \frac{\sin.\,\theta}{1 + \cos.\,\theta}, \\ \text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\theta &= \frac{1 - \cos.\,\theta}{\sin.\,\theta}, \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} &\sin.\,\theta - \cos.\,\theta\ \text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\theta = \text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\theta, \\ &\cos.\,\theta + \sin.\,\theta\ \text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\theta = 1, \end{aligned}\right.$$

donc

$$\text{tg.}\,(\tfrac{1}{2}\theta - \alpha) = \frac{1 - a}{1 + a}\,\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\theta.$$

SCOLIE. Si $\theta = 90$, on peut employer immédiatement la formule

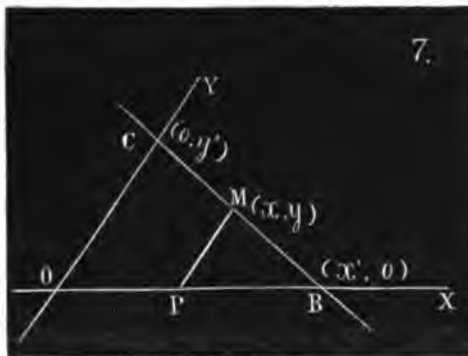
$$\text{tg.}\,\alpha = a\,;$$

ou, la précédente donnant

$$\text{tg.}\,(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

PROBLÈME II.

Déterminer l'équation d'une droite en fonction des coordonnées à l'origine.



Soient $(x', 0)$ les coordonnées du point B où la droite coupe l'axe des X, $(0, y')$ celles de l'intersection avec Y; x' et y' sont dites les *coordonnées à l'origine de la droite* BC.

Désignons maintenant par (x, y) les variables d'un point quelconque M de la droite BC; les triangles semblables BMP et BCO donnent

$$OC : MP :: OB : BP \quad ou \quad y' : y :: x' : x' - x,$$

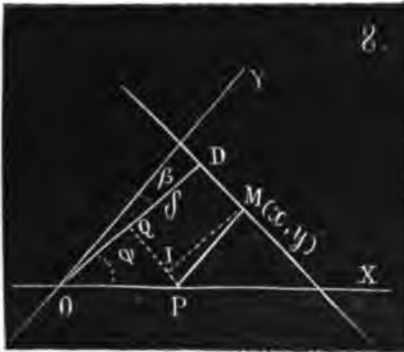
d'où

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1.$$

N. B. Cette forme, éminemment symétrique, est très-importante à retenir pour certaines applications.

PROBLÈME III.

Trouver l'équation de la droite, en fonction de sa distance δ *à l'origine et des angles* α *et* β *qu'elle forme avec les axes positifs.*



Or, δ est évidemment ici la projection de la somme des coordonnées OP (x) et PM (y) d'un point quelconque M de la droite, donc

$$OQ + QD = OD \quad ou \quad x\cos.\alpha + y\cos.\beta = \delta.$$

N. B. Cette forme est aussi importante que la précédente.

PROBLÈME IV.

Trouver l'équation d'une droite passant par deux points donnés $[x', y']$ et $[x'', y'']$.

L'équation cherchée est de la forme

$$y = ax + b \qquad (1),$$

a et b sont les constantes angulaires et linéaires inconnues.

Mais, cette droite devant passer par les deux points donnés, nous aurons les équations de condition

$$(2) \qquad y' = ax' + b \quad \text{et} \quad y'' = ax'' + b \qquad (3).$$

Ainsi, tout se réduit à résoudre (2) et (3) par rapport aux constantes inconnues a et b, et à substituer leurs valeurs dans (1); cette double opération s'exprime brièvement en disant : que l'*équation demandée résultera de l'élimination de ces constantes entre* (1), (2) *et* (3).

Or, (1) et (2) donnent, par voie de soustraction,

$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots (4);$$

puis de (2) et (3) on déduit, de la même manière,

$$y' - y'' = a(x' - x''), \quad \text{d'où} \quad a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \qquad (a);$$

donc (4) devient définitivement

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \ldots\ldots \qquad (D)$$

Discussion. Cette équation (D) convient également au cas même où la droite serait parallèle à un axe. En effet, soit $y'' = y'$: on obtient

$$y = y',$$

caractérisation *d'une parallèle à l'axe des* X. En posant $x'' = x'$ dans (D), d'abord résolue par rapport à $x - x'$, il vient

$$x = x';$$

c'est-à-dire, *une parallèle à* Y.

Enfin, $x'' = x'$ et $y'' = y'$ réduit (D) à

$$y - y' = \frac{0}{0}(x - x');$$

et l'indétermination est *géométriquement* bien évidente, puisque les deux points sont confondus en un seul.

REMARQUES I. — L'équation (4) est très-importante à noter dans la mémoire, car elle est celle d'une droite passant par un point donné $[x', y']$: En effet, elle est vérifiée en posant simultanément

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$$

II. — La valeur (a) indique que : LA DIRECTION D'UNE DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS VAUT LA DIFFÉRENCE DES ORDONNÉES DE CES POINTS, DIVISÉE PAR LA DIFFÉRENCE DES ABSCISSES DES MÊMES POINTS, PRISES DANS LE MÊME ORDRE.

PROBLÈME V.

Déterminer l'équation d'une droite passant par un point $[x', y']$ *et parallèle à une droite donnée* $[y = ax + b]$.

D'abord, l'équation demandée est de la forme

$$y - y' = a'(x - x'),$$

a' étant encore inconnu.

Ensuite, la droite étant parallèle à celle ayant a pour direction, on a évidemment

$$a' = a,$$

d'où

$$y - y' = a(x - x'),$$

pour la relation cherchée.

Exercices.

I. Construire les droites

$$y+2x=0, \quad y+x+2=0, \quad 3x-2y+4=0 \quad et \quad 5y+2x=0.$$

II. Déterminer les équations des droites passant par les couples de points :

$$[(0,1), (1,-1)]; \quad [(2,3), (2,4)]; \quad [(1,1), (-2,-2)] \quad et \quad [(0,-a), (0,-b)].$$

III. Quelles sont les équations des droites menées par le point $(a, 0)$ et formant un angle de 45° avec l'axe des X?

IV. Trouver les équations des diagonales du quadrilatère ayant pour sommets

$$(2,-3), \quad (-3,4), \quad (1,-1) \quad et \quad (5,-6).$$

V. Les axes coordonnés formant l'angle θ, déterminer la condition pour que les droites

$$Ay + Bx + C = 0 \quad et \quad A'y + B'x + C' = 0$$

forment des angles égaux avec les directions opposées de l'axe des X.

V. Quel est l'angle formé avec l'axe des X par chacune des droites

$$y.\sqrt{3}+x+1=0, \quad 2y-3x+4=0, \quad y-3x=0 \quad et \quad 3y-5x+9=0?$$

(Les axes étant d'abord rectangulaires, puis formant un angle de 60°)

VI. Former l'équation de la droite dont la distance 3 à l'origine fait avec l'axe des X un angle de 45° et avec l'axe des Y un angle de 30°.

IVe LEÇON.

SOMMAIRE.

Suite des Problèmes & Théorèmes sur la droite & le point. — Exercices.

PROBLÈME VI.

Déterminer le point d'intersection de deux droites.

Soient

$$\text{D)}\qquad y = ax + b \quad \text{et} \quad y = a'x + b' \qquad \text{(D}'$$

les droites données.

Tout d'abord, il est évident que si on construisait ces droites, le point demandé serait immédiatement fixé; mais ce qu'on veut, ordinairement, ce sont les coordonnées de ce point : or, il est certain que cela revient à résoudre simultanément les équations (D) et (D′) comme deux équations à deux inconnues, ce qui détermine alors les génératrices rectilignes parallèles aux axes.

En effectuant les calculs indiqués par la théorie précédente, il vient

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

DISCUSSION. I. $a = a'$ donne

$$x = \frac{b' - b}{0} = \infty \quad \text{et} \quad y = \frac{a\,(b' - b)}{0} = \infty;$$

en effet, *les droites sont alors parallèles.*

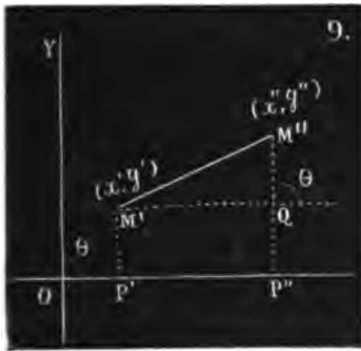
II. $a = a'$ et $b = b'$ fournissent

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad y = \frac{0}{0};$$

c'est-à-dire le symbole de l'indétermination, puisque *les droites coïncident* : en effet, elles sont parallèles et passent par un même point situé sur Y.

PROBLÈME VII.

Trouver la distance entre deux points [x', y'] *et* [x'', y''].



En supposant d'abord les axes rectangulaires, nous avons spontanément, par le triangle rectangle M''M'Q,

$$M'M'' = \sqrt{\overline{M'Q}^2 + \overline{M''Q}^2};$$

ou, à cause de $M'Q = x'' - x'$ et de $M''Q = y'' - y'$,

$$M'M'' = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}.$$

Cette formule, d'un énoncé facile, convient à toutes les positions des deux points, pourvu toutefois que leurs coordonnées soient considérées avec les signes caractérisant leurs positions par rapport aux axes.

Si maintenant les axes sont obliques et forment l'angle θ, le triangle *obliquangle* M''M'Q, donnera

$$M'M'' = \sqrt{\overline{M'Q}^2 + \overline{M''Q}^2 + 2M'Q.\,M''Q.\cos.\,\theta},$$

parce que θ est le supplément de l'angle M''QM'; et par suite

$$M'M'' = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + 2(x''-x')(y''-y')\cos.\,\theta}.$$

REMARQUE. Les formules précédentes deviennent, en supposant qu'un des points, $[x', y']$ par exemple, soit l'origine

$$M'M'' = \sqrt{x''^2 + y''^2} \quad \text{et} \quad M'M'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + 2x''y''\cos.\,\theta}.$$

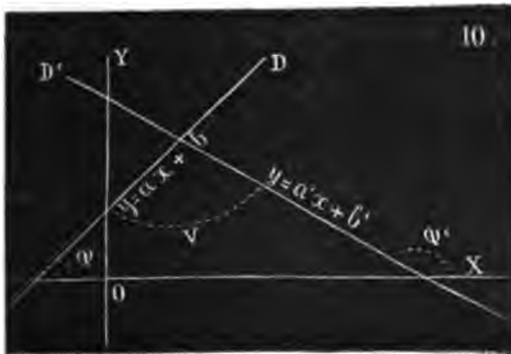
PROBLÈME VIII.

Déterminer l'angle de deux droites.

Soient

$$(D) \qquad y = ax + b \quad \text{et} \quad y = a'x + b' \qquad (D')$$

les droites données.



Supposons les droites tracées et les axes rectangulaires; nous avons

$$\alpha' = V + \alpha \quad d'où \quad V = \alpha' - \alpha;$$

et par suite

$$\text{tg.}\,V = \frac{\text{tg.}\,\alpha' - \text{tg.}\,\alpha}{1 + \text{tg.}\,\alpha\,\text{tg.}\,\alpha'} \qquad (1).$$

Or,

$$\text{tg.}\,\alpha' = a' \quad \text{et} \quad \text{tg.}\,\alpha = a,$$

donc

$$\text{tg. V} = \frac{a' - a}{1 + aa'} \qquad (\text{tg. V}).$$

Ainsi, *la tangente trigonométrique* (axes rectangulaires) *de l'angle de deux droites, vaut la différence des directions de ces droites, divisée par l'unité augmentée du produit de ces directions.*

Si maintenant nous considérons le cas d'axes obliques, la formule (1) subsiste toujours, mais tg. α et tg. α', déterminées par les relations

$$a = \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\theta - \alpha)} \quad \text{et} \quad a' = \frac{\sin. \alpha'}{\sin. (\theta - \alpha')},$$

donnant

$$\text{tg. } \alpha = \frac{a \sin. \theta}{1 + a \cos. \theta} \quad \text{et} \quad \text{tg. } \alpha' = \frac{a' \sin. \theta}{1 + a' \cos. \theta},$$

on en déduit

$$\text{tg.}_1 \text{ V} = \frac{(a' - a) \sin. \theta}{1 + aa' + (a + a') \cos. \theta} \qquad (\text{tg.}_1 \text{ V}).$$

DISCUSSION I. (D) et (D') sont *parallèles* : il vient, à cause de $V = 0 = 180°$,

$$\text{tg. V } ou \text{ tg.}_1 \text{ V} = 0 \quad d'où \quad a = a'.$$

II. (D) et (D') sont *rectangulaires* : alors $V = 90°$; donc

$$\text{tg. V } ou \text{ tg.}_1 \text{ V} = \infty,$$

ce qui exige

$$1 + aa' = 0 \quad ou \quad 1 + aa' + (a + a') \cos. \theta = 0;$$

et par suite

$$a' = -\frac{1}{a} \quad \text{ou} \quad a' = \frac{-1 - a \cos. \theta}{a + \cos. \theta}.$$

Ainsi, dans le cas d'axes rectangulaires, *la direction d'une perpendiculaire à une droite, vaut la valeur inverse, prise en signe contraire, de la direction de cette dernière.*

PROBLÈME IX.

Trouver l'équation de la distance d'un point [x', y'] *à une droite* [y = ax + b] *et cette distance elle-même.*

L'équation de la perpendiculaire sera de la forme

$$y - y' = a' (x - x'),$$

avec la condition, les axes étant supposés *rectangulaires*,

$$1 + aa' = 0,$$

d'où

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \;\ldots\ldots\; (\mathrm{P})$$

pour la représentation analytique de la normale demandée.

Quant à *la valeur numérique* δ de la distance du point (x', y') à la droite $(y = ax + b)$, elle sera donnée par

$$\delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

x et y étant les coordonnées du pied de la normale. Or, l'équation de la droite donnée peut s'écrire

$$y - y' = a(x - x') - (y' - ax' - b) \qquad (\mathrm{D});$$

d'où, par sa combinaison avec (P),

$$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{a^2 + 1} \quad \text{et} \quad y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{a^2 + 1};$$

et par suite

$$\delta = \frac{y' - ax' - b}{\pm\sqrt{a^2 + 1}} \;\ldots\ldots \qquad (\delta)$$

REMARQUE. Cette valeur de δ étant purement *numérique*, on devra affecter le radical du même signe que le numérateur.

Si maintenant nous considérons le cas d'axes formant un angle θ, on aura

$$a' = \frac{-1 - a\cos.\theta}{1 + a\cos.\theta} \quad \text{et} \quad \delta' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(y-y')\cos.\theta},$$

d'où

$$y - y' = \frac{-1 - a\cos.\theta}{1 + a\cos.\theta}(x - x') \;\ldots\ldots \qquad (\mathrm{P}')$$

pour l'équation de la perpendiculaire, et

$$\delta' = \frac{(y' - ax' - b)\sin.\theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos.\theta}} \;\ldots. \qquad (\delta')$$

N. B. Il est souvent utile de connaître les formules (δ) et (δ'), lorsque la droite donnée est de la forme

$$\mathrm{A}y + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0;$$

pour cela il suffit de changer a et b respectivement en $-\frac{B}{A}$ et $-\frac{C}{A}$, ce qui donne

$$\delta = \frac{Ay'+Bx'+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad et \quad \delta' = \frac{(Ay'+Bx'+C)\sin.\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos.\theta}}.$$

Ces formules s'énoncent et se retiennent facilement, lorsqu'on les compare à l'équation de la droite donnée.

REMARQUE. — La distance δ de l'origine des coordonnées rectangulaires à une droite étant

$$\delta = \frac{b}{\sqrt{a^2+1}},$$

on en déduit pour l'équation de cette ligne, en fonction de sa direction a et de δ,

$$y = ax + \delta\sqrt{a^2+1}.$$

Cette relation est importante à noter, parce qu'elle représente la tangente au cercle ayant l'origine pour centre, δ pour rayon et a étant la direction de cette tangente.

PROBLÈME X.

Déterminer l'équation de la droite passant par un point [x', y'] *et formant un angle* V *avec une droite* [y = ax + b] donnée.

Soit θ l'angle des axes, nous aurons, en appelant a' la *direction inconnue* de la droite demandée,

$$\text{tg. V} \quad ou \quad \pm m = \frac{(a'-a)\sin.\theta}{1+aa'+(a+a')\cos.\theta};$$

et nous affectons tg. V du double signe $\pm$, parce que deux droites qui se coupent font entre elles *deux angles supplémentaires*.

La relation précédente donne

$$a' = \frac{-a\sin.\theta \mp m \mp ma\cos.\theta}{\pm ma \pm m\cos.\theta - \sin.\theta},$$

et, comme la droite a primitivement pour équation

$$y - y' = a'(x - x'),$$

il vient

$$y - y' = \frac{-a\sin.\theta \mp m \mp ma\cos.\theta}{\pm ma \pm m\cos.\theta - \sin.\theta}(x - x')$$

pour la fonction demandée.

Donc, *deux solutions;* c'est du reste une conséquence immédiate d'un théorème de géométrie élémentaire.

CAS PARTICULIERS. I. $\theta = 90^\circ$ donne

$$y - y' = \frac{-a \mp m}{\pm ma - 1}(x - x').$$

II. $\theta = V = 90^\circ$ donnent d'abord, à cause de $m = \infty$,

$$y - y' = \frac{\infty}{\infty}(x - x');$$

mais, comme on a aussi

$$\frac{-a \mp m}{\pm am - 1} = \frac{-\frac{a}{m} \mp 1}{\pm a - \frac{1}{m}},$$

il vient, en posant $m = \infty$,

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\mp 1}{\pm a} = -\frac{1}{a};$$

c'est-à-dire

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Ce dernier résultat démontre ce théorème de géométrie élémentaire : *d'un point on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur une droite donnée.*

PROBLÈME XI.

Former l'équation de la bissectrice de l'angle de deux droites. (Les axes seront supposés rectangulaires).

Soient

$$\text{D)} \qquad y = ax + b \quad et \quad y = a'x + b' \qquad \text{(D}'$$

les droites données.

Il est évident que cela revient à déterminer le lieu des points à égales distances des deux droites (D) et (D'). Or, en désignant par (X, Y) les coordonnées d'un point quelconque du lieu ; on aura, pour ses distances à (D) et à (D'),

$$\frac{Y - aX - b}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad et \quad \frac{Y - a'X - b'}{\sqrt{a'^2 + 1}};$$

et par suite, pour n'omettre aucune solution,

$$\frac{Y - aX - b}{\pm\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{Y - a'X - b'}{\sqrt{a'^2 + 1}},$$

d'où :

$$Y = \frac{a\sqrt{a'^2+1} \mp a'\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a'^2+1} \mp \sqrt{a^2+1}}X + \frac{b\sqrt{1+a'^2} \mp b'\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a'^2+1} \mp \sqrt{a^2+1}}.$$

Ainsi, le lieu se compose *de deux droites perpendiculaires entre elles*, car le produit de leurs directions vaut *moins l'unité;* c'est du reste une des propriétés des bissectrices des angles formés par deux droites convergentes.

PROBLÈME XII.

Exprimer l'aire d'un triangle, en fonction des coordonnées de ses sommets (Axes rectangulaires).

Soient (x', y'), (x'', y'') et (x''', y''') les coordonnées des sommets ; en désignant par B la longueur de la base des deux derniers sommets, nous avons

$$B = \sqrt{(x''-x''')^2 + (y''-y''')^2};$$

et pour son équation

$$y - y'' = a\,(x - x''),$$

avec la condition

$$a = \frac{y''-y'''}{x''-x'''}.$$

Ceci posé, en désignant par h la hauteur abaissée du sommet $(x'\,y')$, nous avons également

$$h = \frac{y'-y''-a\,(x'-x'')}{\sqrt{a^2+1}},$$

d'où, en remplaçant a par sa valeur,

$$h = \frac{(y'-y'')\,(x''-x''') - (y''-y''')\,(x'-x'')}{\sqrt{(x''-x''')^2+(y''-y''')^2}};$$

et par suite

$$Bh \quad ou \quad 2T = (y'-y'')\,(x''-x''') - (x'-x'')\,(y''-y''').$$

N. B. Dans le cas d'axes obliques, le second membre de cette équation serait multiplié par sin. θ.

Exercices.

I. Déterminer la distance des points (— 1, 4) et (3, 7), pour des axes : 1° *rectangulaires*, 2° formant l'angle de 30°.

II. Calculer la surface du triangle ayant pour sommets

$$(1, 1), \quad (-1, 2) \quad et \quad (-1, 1).$$

III. Déterminer l'équation de la droite passant par le point $(3, -2)$ et formant un angle de $30°$ avec $2y - 3x + 1 = 0$ (*axes rectangulaires*).

IV. Quelles sont les coordonnées de l'intersection des droites

$$x + y = 1 \quad et \quad y - x - 2 = 0?$$

V. Mener par le point $(-1, 5)$ une droite formant un angle de $60°$ avec $x + y\sqrt{3} = 1$, (*axes rectangulaires*).

VI. Quelle est la distance du point $(1, -2)$ à la droite $x + y - 3 = 0$ (*axes* 1° *rectangulaires*, 2° *formant un angle de* 45°)?

VII. Distance du point (a, b) à la droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (*axes rectangulaires*).

VIII. Trouver les équations des diagonales du quadrilatère ayant pour côtés

$$x = 4, \; y = 5, \; y = x, \; y = 2x.$$

IX. Quels que soient les axes coordonnés, déterminer l'angle des droites

$$y + x = 0 \quad et \quad y - x = 0.$$

X. Les droites

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad et \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,$$

formant avec les axes coordonnés des triangles équivalents, déterminer les droites qui passent par leur intersection et l'origine

XI. Déterminer (*axes rectangulaires*) l'angle des droites

$$x + y\sqrt{3} = 0 \quad et \quad x - y\sqrt{3} = 2; \quad x + 3y = 1 \quad et \quad x - 2y = 1.$$

XII. Calculer (*axes rectangulaires*) le cosinus de l'angle des droites

$$y - mx = 0 \quad et \quad m'y + x = 0.$$

(*cas particulier* $m' = m$)

XIII. Quelle est la distance (*axes rectangulaires*) de deux parallèles?

Ve LEÇON.

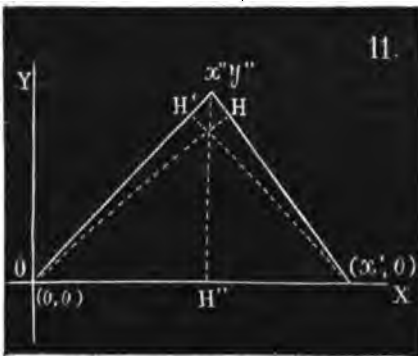
—

SOMMAIRE.

Suite des problèmes & théorèmes sur la droite et le point. — Exercices

THÉORÈME I.

Dans un triangle, les trois hauteurs se coupent en un même point.



Supposons les axes rectangulaires, un des côtés pour axe des X et une de ses extrémités pour origine; nous aurons pour la hauteur abaissée

du sommet (x'', y'') ... $x = x''$.. (H")

du sommet $(0, 0)$ ... $y = -\frac{x''-x'}{y''} x$. (H)

du sommet $(x', 0)$ ... $y = -\frac{x''}{y''}(x - x')$ (H')

Or, comme $x = x''$ donne pour (H) et (H')

$$y = \frac{x''(x' - x'')}{y''};$$

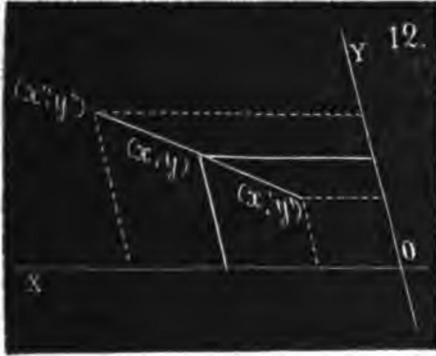
c'est-à-dire la même ordonnée, le théorème est démontré.

N. B. Les coordonnées du point d'intersection sont

$$\left[x = x'',\ y = \frac{x''(x' - x'')}{y''}\right].$$

THÉORÈME II.

Les coordonnées du point milieu d'une droite valent respectivement la demi-somme des coordonnées analogues des points extrêmes.



Ce théorème est une conséquence immédiate des trapèzes formés par la droite et les parallèles aux axes, menées par ses extrémités et son point milieu.

THÉORÈME III.

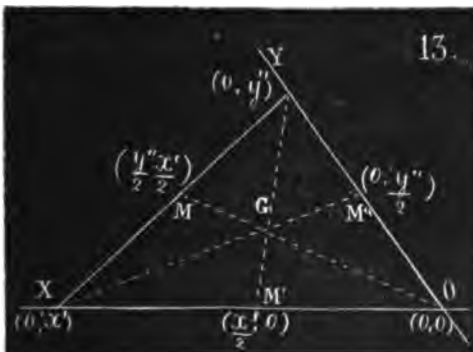
Les médianes d'un triangle se coupent en un même point situé au tiers de chacune d'elles, à partir de la base.

En prenant pour axes coordonnés, deux des côtés du triangle; nous aurons, pour la médiane

du sommet (0, 0) . . . . . $y = \frac{y''}{x'} x$ . . . . . (M),

du sommet (0, y'') . . . . . $y = -\frac{2y''}{x'}\left(x - \frac{x'}{2}\right)$ . . . . . (M'),

du sommet (x', 0) . . . . . $y = -\frac{y''}{2x'}(x - x')$ . . . . . (M'').



Or, deux quelconques de ces trois droites donnent pour les coordonnées de leur intersection

$$\left[y = \frac{y''}{3}, \quad x = \frac{x'}{3}\right];$$

c'est-à-dire un point unique.

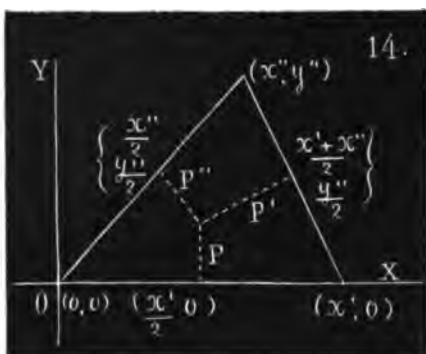
C. Q. F. D.

De plus, les valeurs des coordonnées du point G indiquent bien que ce point, communément appelé *centre de gravité* du triangle, est situé au tiers de chaque médiane, à partir de la base.

THÉORÈME IV.

Les perpendiculaires élevées par les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point, centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Supposons les axes rectangulaires, l'axe des X coïncidant avec un des côtés du triangle et l'origine à l'une des extrémités de ce côté.



Nous aurons, pour les perpendiculaires

$$x = \frac{x'}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (P)$$

$$y - \frac{y''}{2} = -\frac{x''-x'}{y''}\left(x - \frac{x'+x''}{2}\right) \dots\dots (P')$$

$$y - \frac{y''}{2} = -\frac{x''}{y''}\left(x - \frac{x''}{2}\right) \dots\dots (P'')$$

Or, en combinant (P) soit avec (P'), soit avec (P''), on obtient, pour l'ordonnée des intersections,

$$y = \frac{y''}{2} + \frac{x''(x''-x')}{2y''};$$

c'est-à-dire *un seul point*. C. Q. F. D.

D'un autre côté, en cherchant les distances du point précédent à chacun des trois sommets, on a

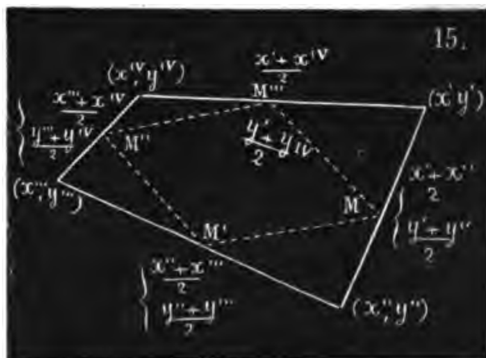
$$R = \sqrt{\left(\frac{x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y''^2 + x''^2 - x'x''}{2y''}\right)^2};$$

c'est-à-dire *une quantité constante*. Ainsi ce point est bien le *centre du cercle circonscrit au triangle proposé*.

THÉORÈME V.

Les milieux des quatre côtés d'un quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme.

En effet, la droite MM' a pour *direction*



$$\frac{\frac{y'+y''}{2} - \frac{y''+y'''}{2}}{\frac{x'+x''}{2} - \frac{x''+x'''}{2}} \text{ ou } \frac{y'-y'''}{x'-x'''},$$

et celle de M''M''' sera

$$\frac{\frac{y'''+y^{\text{IV}}}{2} - \frac{y'+y^{\text{IV}}}{2}}{\frac{x'''+x^{\text{IV}}}{2} - \frac{x'+x^{\text{IV}}}{2}} \text{ ou } \frac{y'''-y'}{x'''-x'};$$

donc ces droites sont parallèles. On démontrerait de même que MM''' et M'M'' sont aussi parallèles, il s'ensuit que la figure MM'M''M''' est bien un parallélogramme.

Théorème VI.

Le lieu des points à égales distances de deux points donnés, est la médiatrice perpendiculaire à la droite passant par ces deux points.

Comme il s'agit ici de distances entre points, prenons encore des axes rectangulaires; désignons par (x, y) les coordonnées d'un des points du lieu demandé et par (x', y'), (x'', y'') les deux points donnés, nous avons spontanément

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2,$$

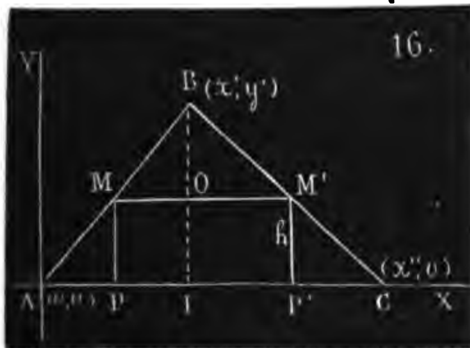
ou

$$y = -\frac{x' - x''}{y' - y''}\,x + \frac{x''^2 - x'^2 + y''^2 - y'^2}{y' - y''}; \qquad (\varphi)$$

c'est-à-dire l'équation d'une droite perpendiculaire à celle passant par (x', y') et (x'', y'') : de plus, cette équation (φ) étant vérifiée par les coordonnées du point milieu de la droite des deux points, le théorème est démontré.

Théorème VII.

Le rectangle maximum inscrit dans un triangle a pour hauteur la moitié de celle du triangle, et sa surface vaut la moitié du triangle.



Soient $(0, 0)$, $(x'', 0)$ et (x', y') les trois sommets A, C et B du triangle, et soit

$$y = h.... \qquad (\text{MM}')$$

l'équation de la base MM' du rectangle et parallèle au côté $[(0, 0), (x'', 0)]$.

Ceci posé, nous avons pour les côtés AB et BC

$$\text{AB})\ldots \quad y = \frac{y'}{x'}\,x \quad \text{et} \quad y = \frac{y'}{x' - x''}\,(x - x'')\ldots \quad (\text{BC}$$

et, en remplaçant y par h, il vient, pour les abscisses des points M et M',

$$\text{AP} = \frac{x'}{y'}\,h \quad \text{et} \quad \text{AP}' = x'' + \frac{x' - x''}{y'}\,h;$$

donc, pour MM′, qui est la différence entre AP′ et AP,

$$MM' = x'' - \frac{x''}{y'}\, h = \frac{x''y' - hx''}{y'}.$$

Ceci posé, soit k^2 la surface *maxima* demandée, on a

$$\frac{x''y' - hx''}{y'} . \, h = k^2,$$

d'où

$$h = \frac{y'}{2} \pm \sqrt{\frac{y'^2}{4} - \frac{k^2 y'}{x''}}.$$

Or, h ne sera *réel* que pour

$$\frac{k^2 y'}{x''} \leqq \frac{y'^2}{4},$$

d'où

$$Maximum \;\; k^2 = \frac{x''y'}{4} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\, x''y'\right) = \tfrac{1}{2} \;\; surface \;\; ABC;$$

et

$$h = \frac{y'}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi la construction se réduit : *à mener par le milieu* O *de la hauteur* BI, MM′ *parallèle à* AC *et à abaisser de ses intersections avec* AB *et* BC, *des perpendiculaires sur* AC.

THÉORÈME VIII.

L'équation de la droite passant par le point (a, b) *et par l'intersection des droites*

$$\text{D)} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad et \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \qquad \text{(D}',$$

est

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous ferons usage *d'une indéterminée* (2ᵉ leçon Théor. VI) ce qui constituera une méthode d'opération qui nous sera souvent utile : à cet effet, multiplions (D′) par λ et ajoutons le résultat à (D), il vient

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda}{b}\right) x + \left(\frac{1}{b} + \frac{\lambda}{a}\right) y = 1 + \lambda \qquad (1),$$

pour l'équation de toute droite concourant au même point que (D) et (D′), puisque ces dernières relations la vérifient.

D'un autre côté, (1) devant passer par le point (a, b), nous avons l'égalité

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda}{b}\right) a + \left(\frac{1}{b} + \frac{\lambda}{a}\right) b = 1 + \lambda.$$

d'où on déduit

$$\lambda = \frac{-ab}{a^2 - ab + b^2};$$

et par suite, en substituant dans (1),

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \ldots\ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exercices.

I. Trouver la distance de deux parallèles.

II. Déterminer la tangente de l'angle formé par les droites

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 = 0,$$

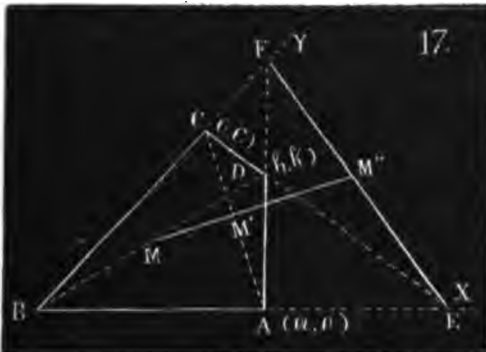
et la condition pour que ces droites soient rectangulaires (*les axes formant l'angle* θ).

III. Calculer l'aire du triangle formé par les droites (*axes rectangulaires*)

$$y = \text{tg}.\,\alpha.\,x, \quad y = \text{tg}.\,\beta.\,y \quad \text{et} \quad y = \text{tg}.\,\gamma.\,x + c.$$

IV. Quelles sont les conditions de convergence pour les droites

$$Ay + Bx + C = 0, \quad A'y + B'x + C = 0 \quad \text{et} \quad A''y + B''x + C'' = 0\,?$$



V. Dans le quadrilatère ABCD, on demande : 1° les équations des côtés, des diagonales et de la droite joignant les milieux de ces dernières ; 2° l'équation de EF et 3° démontrer que les milieux de EF et des diagonales AC et BD sont en ligne droite.

VI. Fixer la position du point de l'axe des X qui est distant de δ de la droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

VII. Reconnaître si trois points (x', y'), (x'', y'') et (x''', y''') sont en ligne droite.

VIII. Par le point d'intersection de deux droites données, mener une perpendiculaire à une droite donnée.

IX. Si, d'un point pris dans l'intérieur d'un losange, on abaisse des perpendiculaires sur ses côtés, la somme de ces quatre perpendiculaires sera constante.

X. Déterminer les droites qui, passant par le point $(2, -3)$, forment un angle de 45° avec

$$3y - 2x + 5 = 0,$$

et leurs longueurs (*axes rectangulaires*).

XI. Les lieux

$$16y^2 - 24xy + 9x^2 - 15y - 20x + 25 = 0,$$
$$y^2 - 2y - x - 1 = 0,$$

sont-ils identiques ?

XII. Deux courbes représentées par

$$x^2 + y^2 = 1,$$

sont-elles identiques ? sachant que la première est rapportée à des axes rectangulaires et la seconde à des coordonnées formant un angle de 150°.

VI° LEÇON.

SOMMAIRE.

Étude de la formation de l'équation de quelques lieux géométriques. — Théorie générale de la génération analytique des lieux. — Exercices.

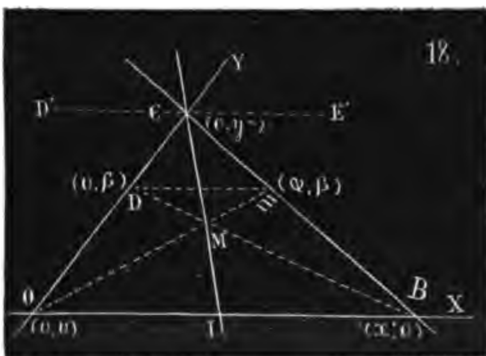
18. Les lignes doivent être conçues comme étant composées d'une suite successive de points et sans interruption de continuité ; cependant, les éléments d'une ligne devant être homogènes avec elle, on ne doit pas regarder le point comme l'élément de la ligne.

Ceci posé, toute condition capable de déterminer soit un point, soit un élément linéaire, devra être considérée comme étant susceptible d'engendrer une ligne.

Les exemples qui vont suivre nous permettront ensuite de généraliser la théorie générale de la mise en équation des lieux géométriques.

Problème I.

Une droite Dm, *se meut parallèlement à la base* OB *du triangle* OBC. *On demande le lieu de l'intersection* M, *des droites* Om *et* BD.



On reconnaît déjà que le sommet C appartient à la ligne demandée, car lorsque la parallèle directrice Dm occupe la position D'E', les droites génératrices Om et BD deviennent OC et BC et donnent ce point C.

Ceci posé, prenons les côtés OB et OC du triangle OBC pour axes coordonnés, et en désignant par

(α, β) les variables d'un point m quelconque de BC, nous aurons pour les équations de

$$\text{Dm)}\ldots\ldots \qquad y = \beta,$$

$$\text{BC)}\ldots\ldots \qquad \frac{x}{x'} + \frac{y}{y''} = 1,$$

$$\text{OC)}\ldots\ldots \qquad x = 0;$$

et les génératrices Om et BD du point M seront

$$\text{G)} \qquad y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{et} \quad \frac{x}{x'} + \frac{y}{\beta} = 1 \qquad \text{(G')};$$

mais, comme le point (α, β) appartient à (BC), on a *l'équation de condition*

$$\frac{\alpha}{x'} + \frac{\beta}{y''} = 1 \qquad (1).$$

Or, les quantités α et β, *constantes* pour une situation spéciale de Dm, varient avec la situation de cette droite; aussi désignons-nous α et β sous le nom de CONSTANTES VARIABLES. Maintenant, si nous donnons à β une valeur particulière, (1) déterminera la valeur correspondante de α; et, en substituant ces quantités dans (G) et (G'), nous aurons un couple de génératrices, ici *rectilignes*, qui, par leur intersection, donnerait un point du lieu demandé, et ainsi de suite. Donc, en éliminant les *constantes variables* α et β entre (G), (G') et (1), nous aurons une relation donnant tous les points communs à (G) et (G'), soumis à la condition (1) et indépendamment de α et β; c'est-à-dire l'équation du lieu demandé.

Or, (G) et (G') donnent

$$\alpha = \frac{xx'}{x'-x}, \qquad \beta = \frac{yx'}{x'-x};$$

d'où, en substituant ces valeurs dans (1), il vient, toute réduction faite,

$$\frac{x}{\left(\frac{x'}{2}\right)} + \frac{y}{y''} = 1 \ldots. \quad (\varphi)$$

Ainsi le lieu demandé *est la médiane de la base* OB.

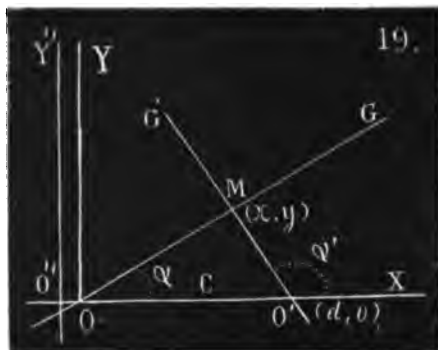
PROBLÈME II.

Déterminer le lieu de l'intersection de deux droites tournant, chacune, autour d'un de leurs points; et de telle sorte que les angles qu'elles forment avec la droite des points fixes soient complémentaires.

Soient O et O' les points fixes, et OG, O'G' une position spéciale des deux droites génératrices du point M; c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$\alpha + \alpha' = 90^\circ \quad ou \quad \text{tg.}\,\alpha = \text{cotg.}\,\alpha' \quad ou \quad \text{tg.}\,\alpha\,\text{tg.}\,\alpha' = 1 \quad (1),$$

comme *équation de condition* entre les *constantes variables* α et α'.



Nous ferons d'abord remarquer au lecteur que les points O et O' seront des points du lieu : car lorsque OG sera couché sur OO' son intersection, avec la position correspondante de O'G' donnera évidemment le point O'; de même le point O sera la conséquence nécessaire de O'G' coïncidant avec O'O et alors perpendiculaire à OG.

Ceci posé, prenons OO' pour axe des X, l'origine en O et les coordonnées rectangulaires; nous aurons, pour les équations des *génératrices* OG et O'G',

$$\text{G)} \qquad y = \text{tg.}\, \alpha.\, x \quad \text{et} \quad y = \text{tg.}\, \alpha'.\, (x - d) \ldots\ldots \qquad \text{(G'}$$

(d désignant la distance OO').

L'élimination des *constantes variables* α et α' entre (1), (G) et (G'), donnera encore l'équation du lieu demandé. En effet, une valeur spéciale attribuée à α', déterminera α au moyen de (1); et par suite un couple particularisé de génératrices (G), (G') fixera un point du lieu, et ainsi des autres : donc, l'élimination indiquée donnera une relation entre les coordonnées (x, y) des points communs à (G), (G') et assujettis à (1); c'est-à-dire l'équation du lieu demandé.

Or, en multipliant membre à membre (1), (G) et (G'), il vient, après la disparition du facteur constant tg. α tg. α',

$$y^2 = x\,(x - d) \quad \text{ou} \quad y^2 - x^2 + dx = 0 \qquad (\varphi).$$

Nous reconnaîtrons plus tard que cette ligne est une *hyperbole équilatère*, ayant pour *centre* le milieu de OO' et pour *axe transverse* OO'.

N. B. Nous engageons le lecteur à faire disparaître le terme en x, en déplaçant l'origine.

Problème III.

Déterminer le lieu des intersections successives des droites AB, A'B', A'' B'',..... *dont la somme des coordonnées à l'origine est constante et égale à* l.

Désignons par α et β les coordonnées à l'origine d'une de ces droites AB, nous aurons

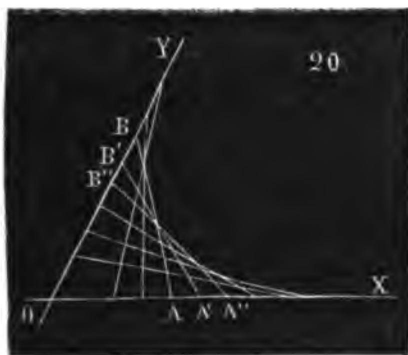
$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \qquad \text{(G)}$$

pour son équation, et sa consécutive A'B', sera

$$\frac{x}{\alpha - n} + \frac{y}{\beta + n} = 1; \qquad \text{(G')}$$

si toutefois nous considérons en même temps la relation de condition

$$\alpha + \beta = l. \qquad (1)$$



Il est évident maintenant que si nous éliminons α et β entre (G), (G') et (1), nous obtiendrons une équation entre les coordonnées d'un point commun à (G) et (G') pour une valeur donnée à n; puis, il suffira de poser $n = 0$ dans ce résultat pour établir la continuité successive des droites AB, A'B', A''B'',.....; et par suite on aura l'équation du lieu demandé.

Or, en faisant disparaître les dénominateurs de (G) et (G') et réduisant la seconde au moyen de la première, il vient

$$(G_1) \qquad \beta x + \alpha y = \alpha\beta \quad \text{et} \quad x - y = \alpha - \beta - n. \qquad (G'_1)$$

Ensuite β tiré de (1) et substitué dans les relations précédentes, donne

$$\alpha y + (l - \alpha)x = \alpha(l - \alpha) \quad \text{et} \quad x - y = 2\alpha - l - n,$$

d'où, en éliminant α,

$$y.\frac{x-y+l+n}{2} + \left(l - \frac{x-y+l+n}{2}\right)x = \left(\frac{x+l-y+n}{2}\right)\left(l - \frac{x-y+l+n}{2}\right);$$

et par suite, en posant $n = 0$,

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2ly - 2lx + l^2 = 0 \ldots\ldots (\varphi)$$

Ainsi le lieu de l'*enveloppe* (nom générique donné à cette création de courbe) est une ligne du second degré. Nous verrons, plus tard, que ce lieu est *une parabole* dont le caractère analytique est que *les termes du second degré forment un carré parfait*.

N. B. Nous engageons le lecteur à déterminer le système des coordonnées réduisant (φ) à la forme

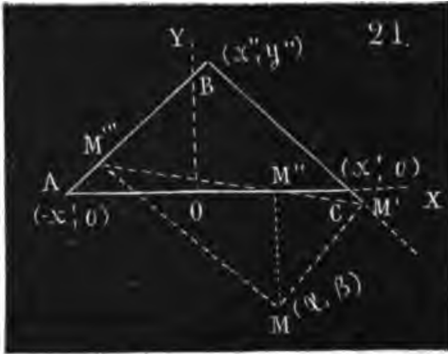
$$y^2 = 2px.$$

PROBLÈME IV.

Trouver le lieu du point dont les projections, sur les côtés d'un triangle, sont en ligne droite.

Il est d'abord évident que chacun des sommets du triangle ABC sera un point du lieu, puisque deux des trois projections se réduisent alors à un point.

Ceci posé, prenons la base AC pour axe des X et sa médiatrice perpendiculaire



pour celui des ordonnées; en désignant par (α, β) les coordonnées d'un point M quelconque du lieu demandé, nous aurons

$$(\alpha, 0) \ldots\ldots (M'')$$

pour les coordonnées de la projection M'' de M sur AC.

D'un autre côté, la droite AB et sa perpendiculaire MM''' sont caractérisées par

$$\text{AB)} \qquad y = \frac{y''}{x''+x'}(x+x') \quad \text{et} \quad y-\beta = -\frac{x''+x'}{y''}(x-\alpha);$$

d'où, pour la projection M''' de M sur AB,

$$\left[\frac{\beta y''(x''+x') + \alpha(x''+x')^2 - x'y''^2}{y''^2+(x''+x')^2},\quad \frac{[\beta y'' + (\alpha+x')(x''+x')]\,y''}{y''^2+(x''+x')^2}\right].$$

Enfin, BC et la projetante de M sur cette droite auront des équations ne différant des droites précédentes qu'en y changeant x' en $-x'$; et par suite M' aura pour coordonnées

$$\left[\frac{\beta y''(x''-x')+\alpha(x''-x')^2+x'y''^2}{y''^2+(x''-x')^2},\quad \frac{[\beta y''+(\alpha-x')(x''-x')]\,y''}{y''^2+(x''-x')^2}\right].$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à exprimer que les trois points M''', M'' et M' sont en ligne droite; c'est-à-dire que les directions des droites $M'''M''$ et $M''M'$ sont égales : donc

$$\frac{\dfrac{[\beta y''+(\alpha+x')(x''+x')]\,y''}{y''^2+(x''+x')^2}}{\dfrac{\beta y''(x''+x')+\alpha(x''+x')^2-x'y''^2}{y''^2+(x''+x')^2}-\alpha} = \frac{\dfrac{[\beta y''+(\alpha-x')(x''-x')]\,y''}{y''^2+(x''-x')^2}}{\dfrac{\beta y''(x''-x')+\alpha(x''-x')^2+x'y''^2}{y''^2+(x''-x')^2}-\alpha};$$

et par suite, en effectuant les calculs et simplifiant, il vient

$$y''(\alpha^2+\beta^2) - (y''^2+x''^2-x'^2)\,\beta = x'^2y'',$$

ou

$$\alpha^2 + \left[\beta - \left(\frac{y''^2+x''^2-x'^2}{2y''}\right)\right]^2 = x'^2 + \left(\frac{y''^2+x''^2-x'^2}{2y''}\right)^2. \qquad (\varphi)$$

N. B. Un peu d'attention de la part du lecteur, lui fera reconnaître que cette ligne est la circonférence des trois sommets du triangle ABC.

Théorie générale de la génération analytique des lieux.

16. Quoique le 4me problème du § précédent n'ait pas été résolu par les mêmes moyens que les trois premiers, ces derniers nous permettront de formuler la théorie générale de la détermination de l'équation d'un lieu.

En effet, soient

$$\text{G)}\quad F(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0 \quad \text{et} \quad F'(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0 \quad (\text{G}'$$

les équations des génératrices d'un lieu demandé; c'est-à-dire les caractérisations analytiques de deux lignes passant par un de ses points : α, β, γ.... désignant des constantes, qui en variant ne font que changer la grandeur et la position de (G) et (G'), tout en leur conservant leur forme primitive; et soit de plus

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0 \quad (1),$$
$$f'.(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0 \quad (2),$$
$$f''.(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0 \quad (3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les équations de condition entre α, β, γ,..... et en nombre $n - 1$; s'il existe n CONSTANTES VARIABLES.

Or, il est évident qu'une valeur *convenable* attribuée à α déterminera les valeurs correspondantes de β, γ,... au moyen des relations (1) (2) (3),...; et, que par suite, on aura *un* ou *plusieurs* couples de génératrices (G), (G') donnant par leurs intersections *un* ou *plusieurs* points du lieu demandé : donc, en éliminant α, β, γ, ... entre (G), (G'), (1), (2), (3)...., on aura évidemment une relation entre les coordonnées d'*un* quelconque des points communs à (G) et (G'), indépendamment des *constantes variables* α, β, γ.....; c'est-à-dire l'équation du lieu donné par les conditions (G), (G'), (1), (2), (3),....

Remarque. — Quoique la théorie précédente soit applicable à chaque génération spéciale, le lecteur aura déjà entrevu que, pour chaque lieu, il y aura toujours un moyen plus simple qu'aucun autre et qui sera évidemment la méthode mathématique; c'est-à-dire le plus en rapport avec l'esprit scientifique, mais que c'est là une étude pour laquelle on ne peut donner aucune prescription générale, si ce n'est celle d'étudier d'abord synthétiquement la question avant de lui appliquer la méthode analytique.

Du reste, les nombreux problèmes que contiendra la suite de ces leçons, donneront au lecteur les éléments nécessaires pour une telle appréciation, *dont le développement général précédent fait partie de nos leçons depuis 1851,*

17. N. B. Maintenant que nous sommes en possession de la théorie générale de la mise en équation des lignes, nous pouvons nous occuper des théories que comporte l'étude des lieux et spécialement des courbes du second ordre, vulgairement appelées SECTIONS CONIQUES, et cela pour des raisons qui seront développées plus tard.

Exercices.

I. Déterminer le lieu du point de rencontre des diagonales d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux diagonales d'un quadrilatère et qui est inscrit dans ce dernier.

II. Quel est le lieu de l'intersection des côtés latéraux d'un trapèze dont les bases sont parallèles à une diagonale d'un quadrilatère et qui est inscrit dans ce dernier?

III. Un triangle OAB, dont un sommet O est fixe, tourne autour de ce sommet en variant de grandeur, mais en restant semblable à lui-même : si le sommet A décrit une droite HL, quel sera le lieu du point B?

IV. Quel est le lieu du point dont la somme des carrés des distances aux quatre sommets d'un rectangle donné est constante?

V. Sur deux droites rectangulaires données OX et OY, on construit un rectangle OACB, ayant un périmètre constant $2p$; quel est le lieu de la projection du sommet C sur la diagonale AB.

VI. Les côtés d'un triangle variable ABC tournent autour de trois points fixes en ligne droite; trouver le lieu du sommet C, sachant que les sommets A et B glissent sur deux droites fixes.

VIIe LEÇON.

—

SOMMAIRE.

Courbes du second ordre (φ) fermées, ouvertes à une et à deux branches. — Classification des théories générales de ces lieux. — (φ) se réduit à un point; à un lieu imaginaire; à deux droites parallèles distinctes, confondues *ou* imaginaires; à deux droites convergentes; à une fonction du second degré à une seule variable; & à une fonction du second degré à deux variables représentant un double lieu rectiligne passant par l'origine. — Réciproques des propriétés précédentes. — Exercices.

18. Nous avons déjà dit qu'une courbe était du second ordre, lorsque la fonction, qui établit *une relation constante* entre les coordonnées de l'un quelconque de ses points, était *algébrique* et *du second degré;* donc, une telle ligne *ne pourra être rencontrée par une droite en plus de deux points.*

Les courbes, dont l'étude générale va suivre, sont dites *fermées*, lorsqu'une droite, la rencontrant, donne toujours *deux intersections; ouvertes* et *à une branche* lorsqu'une droite tracée *dans une certaine direction* ne peut la couper qu'en *un seul point;* enfin, *ouvertes* et *à deux branches,* lorsqu'on peut tracer entre les deux branches, une infinité de droites ne déterminant aucun point de rencontre.

Ceci posé, l'équation générale des courbes du second ordre a pour forme générale

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0. \qquad (\varphi).$$

Nous avons affecté du coéfficient 2 les termes contenant une variable à la première puissance, et cela parce que certains résultats, dont la mémoire doit nécessairement se charger, sont plus simples *ou* du moins plus symétriques. L'étude analytique et géométrique des courbes contenues dans (φ) se fera dans l'ordre suivant

I. L'ÉQUATION (φ) NE REPRÉSENTE PAS UNE COURBE.

II. DE LA TANGENTE ET DE LA NORMALE.

III. DES ASYMPTOTES.
IV. DES DIAMÈTRES ET DES AXES.
V. DU CENTRE.
VI. DE LA SIMILITUDE.
VII. DES FOYERS ET DES DIRECTRICES.
VIII. DES GENRES DE COURBES CONTENUS DANS (φ).
IX. SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION (φ).
X. ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DES COURBES (φ).
XI. IDENTITÉ DES COURBES (φ) ET DES SECTIONS CONIQUES.

Nous terminerons ces leçons par *l'étude des lignes* EN COORDONNÉES POLAIRES; *l'application de la méthode de Descartes à la résolution des équations*; et *enfin par l'analyse des conditions auxquelles un lieu peut être assujetti.*

N. B. Chaque partie sera toujours précédée des définitions nécessaires à son entier développement; de plus, nous prévenons le lecteur que les axes coordonnés seront toujours obliques, à moins toutefois que nous ne le prévenions du contraire.

§ I.

L'équation (φ) ne représente pas une courbe.

19. L'équation complète algébrique du second degré et à deux variables donne

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF} \qquad (1).$$

Or, pour que cette ordonnée soit *du premier degré*, ou constamment *imaginaire*, il faut que le trinôme en x situé sous le radical soit *carré parfait* ou que sa valeur soit toujours *négative* pour une substitution quelconque de la variable x; et comme l'influence du terme en x^2 est caractéristique, nous aurons immédiatement à considérer trois genres donnés par le signe de $B^2 - AC$; et chacun de ceux-ci pouvant donner des cas particuliers.

I : $B^2 - AC < 0$.

1° *Le trinôme sous le radical est carré parfait* : c'est-à-dire que l'on a

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0;$$

alors, x ne peut admettre que la valeur annulant le trinôme, ou

$$x = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC};$$

car toute autre valeur attribuée à cette variable (x), rendrait y imaginaire. Donc,

en désignant par x_1 cette valeur spéciale de x, le lieu (φ) se réduit à celui déterminé par les deux équations

$$y_1 = -\frac{B}{A}x_1 - \frac{D}{A} \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC};$$

c'est-à-dire UN POINT.

Ce résultat peut encore s'obtenir par la loi de composition de l'équation du second degré. En effet, comme on a, dans ce cas,

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\left\{ x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}} \right\}$$

ou

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{P}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\left\{ x + \frac{BD - AE}{B^2 - AC} \right\},$$

l'équation (φ) peut s'écrire

$$\left\{ y + \frac{B}{A}x + \frac{D}{A} \right\}^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}\left\{ x + \frac{BD - AE}{B^2 = AC} \right\}^2 = 0.$$

Or, des valeurs réelles pour x et y ne peuvent satisfaire à cette relation que pour autant que l'on ait en même temps

$$y + \frac{B}{A}x + \frac{D}{A} = 0 \quad \text{et} \quad x + \frac{BD - AE}{B^2 - AC} = 0;$$

c'est-à-dire *deux droites* qui, *à cause de leur existence simultanée,* caractérisent le point indiqué ci-dessus.

N. B. Nous verrons plus tard que ce point n'est autre qu'*une ellipse* ou *un cercle réduit à son centre.*

2° D'un autre côté, *si on a*

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) < 0;$$

c'est-à-dire le trinôme en x *sous le radical donnant des valeurs imaginaires, lorsqu'il est nul;* alors, toute valeur réelle attribuée à x rendant ce trinôme *négatif,* l'ordonnée y sera *imaginaire* et il en sera de même pour ce lieu.

En résumé les courbes du genre $B^2 - AC < 0$, exigent

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) > 0;$$

c'est-à-dire que *les racines de*

$$(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF = 0,$$

soient réelles et inégales.

II : $B^2 - AC = 0$.

L'expression soumise au radical de (1) devient *du premier degré et binômiale;*

et par suite ne sera *linéaire* ou *du premier degré* que pour

$$BD - AE = 0,$$

ou simultanément par

$$BD - AE = 0 \quad \text{et} \quad D^2 - AF = 0.$$

Or, la première hypothèse donne

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{D^2 - AF};$$

et par suite (φ) se réduit à *deux parallèles réelles* ou *imaginaires* suivant que l'on aura $D^2 - AF \gtrless 0$.

Quant à la seconde hypothèse, on a, au premier abord, *la droite unique*

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A};$$

mais on doit la regarder comme *deux droites confondues en une seule*, puisqu'alors (φ) prend la forme

$$\left(y + \frac{B}{A}x + \frac{D}{A}\right)^2 = 0.$$

Nous ferons encore remarquer que la première hypothèse réduit (φ) à

$$\left[y+\frac{B}{A}x+\frac{D}{A}-\frac{1}{A}\sqrt{D^2-AF}\right]\left[y+\frac{B}{A}x+\frac{D}{A}+\frac{1}{A}\sqrt{D^2-AF}\right]=0,$$

et que chacun des facteurs précédents donne une droite; de plus que ces droites sont bien les parallèles indiquées.

Ainsi les courbes du genre $B^2 - AC = 0$ n'existent que pour

$$BD - AE \lessgtr 0.$$

III : $B^2 - AC > 0$.

De même que dans le genre $B^2 - AC < 0$, *l'ordonnée* y *deviendra linéaire, sous la condition*

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0,$$

toutefois avec une profonde distinction géométrique.

En effet, on a

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\left\{x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}}\right\};$$

c'est-à-dire *deux droites convergentes*, puisque, pour

$$x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC},$$

l'ordonnée de ces droites est simple. Du reste, la convergence de ces droites résulterait encore de la diversité de leurs directions

$$-\frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC} \quad \text{et} \quad -\frac{B}{A} - \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC};$$

de plus, ces droites seront rectangulaires pour

$$A + C - 2B \cos. \theta = 0,$$

θ étant l'angle des axes : relation qui se réduit à

$$A + C = 0,$$

dans le cas de coordonnées rectangulaires.

Enfin, les valeurs de y donnent à (φ) la forme

$$\left\{y + \frac{B}{A}x + \frac{D}{A} - \frac{1}{A}\left(x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}}\right)\right\}\left\{y + \frac{B}{A}x + \frac{D}{A} + \frac{1}{A}\left(x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}}\right)\right\} = 0,$$

caractérisant bien les deux droites dont il a été question.

N. B. Nous verrons plus tard que ces droites ne sont autre chose que *les asymptotes* de la courbe $B^2 - AC > 0$, lorsque cette dernière existe.

En résumé le genre $B^2 - AC > 0$ impose

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) \gtrless 0,$$

pour qu'il y ait courbe.

20. Les hypothèses précédentes conservent à (φ) la qualité prépondérante d'être *du second degré* et *à deux variables;* cependant la perte seule de ce dernier caractère donne encore *deux droites réelles* ou *imaginaires*. En effet, pour

$$B = 0,\ C = 0,\ E = 0,$$

il vient

$$Ay^2 + 2Dy + F = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - AF}}{A};$$

c'est-à-dire *deux parallèles à l'axe des* X, *distinctes, confondues en une seule* ou *imaginaires*, suivant que l'on aura

$$D^2 - AF \overset{>}{\underset{<}{=}} 0.$$

De même pour

$$A = 0,\ B = 0,\ D = 0,$$

on a

$$Cx^2 + 2Ex + F = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - CF}}{C},$$

résultat analogue au précédent.

Enfin pour

$$D = 0,\ E = 0,\ F = 0,$$

on obtient

$$y = \left\{ -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC} \right\} x;$$

donc, *deux droites convergentes, confondues* ou *imaginaires* suivant que l'on aura

$$B^2 - AC \gtreqless 0.$$

N. B. On ne peut poser

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0;$$

car alors (φ) devient du premier degré.

21. Nous engageons le lecteur à établir les réciproques de la théorie précédente; et pour cela il lui suffira, après avoir mis (φ) sous la forme

$$y^2 + 2\frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}x^2 + 2\frac{D}{A}y + 2\frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0,$$

d'identifier cette fonction avec :

1° $$(y + ax + b)^2 + (cx + d)^2 + f^2 = 0,$$

pour obtenir *un lieu imaginaire;*

2° $$(y + ax + b)^2 + (cx + d)^2 = 0,$$

pour *un point;*

3° $$(y + ax + b)(y + a'x + b') = 0,$$

deux droites convergentes; et

4° $$(y + ax + b)(y + ax + b') = 0,$$

donnera *deux parallèles*.

La forme des *constantes inconnues* a, b, c, d, f fera retrouver toutes les hypothèses du § 19.

Exercices.

1° Que représente $y^2 - 2xy + 6x^2 - 2y - 28x + 46 = 0$?

2° Quelle est la signification géométrique de

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 3 = 0?$$

3° Construire le lieu

$$y^2 - 2xy - 2y + 4x = 0.$$

4° Interpréter

$$y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 2x - 3 = 0.$$

5° Que caractérise

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y + 2x + 1 = 0?$$

§ II.

De la tangente et de la normale.

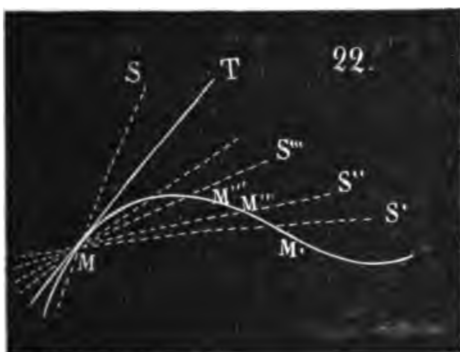
VIIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

De la tangente & de son équation. — Tangente parallèle à l'un des axes coordonnés; à une droite donnée; passant par un point donné. — Corde des contacts. — Tangente commune à deux courbes. — Contact de deux courbes.

De la tangente.

22. On appelle *tangente* à une courbe, la position limite MT que prend une sécante MM'S', lorsque tournant autour d'un des points M d'intersection, un de ces derniers vient à se confondre avec le premier, avant de passer de l'autre côté du premier point M, qui prend alors le nom de *point de contact*.



Ceci posé, désignons par a la direction d'une sécante coupant (φ) en un premier point *constant* (x', y') et en un second point *variable* (x'', y''); nous aurons

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \dots \quad (1).$$

Or, ces points donnent, par le seul fait de leur situation sur (φ),

$$\left.\begin{array}{l} Ay'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F = 0, \\ Ay''^2 + 2Bx''y'' + Cx''^2 + 2Dy'' + 2Ex'' + F = 0, \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \varphi(x', y') = 0 \ldots \quad (2), \\ \varphi(x'', y'') = 0 \ldots \quad (3); \end{array}\right.$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$A(y'^2 - y''^2) + 2B(x'y' - x''y'') + C(x'^2 - x''^2) + 2D(y' - y'') + 2E(x' - x'') = 0,$$

et par suite

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{2By'' + C(x' + x'') + 2E}{A(y' + y'') + 2Bx' + 2D}.$$

Maintenant, pour obtenir la direction de la tangente au point (x', y'), posons $x'' = x'$ et $y'' = y'$; donc, après réduction,

$$\alpha = -\frac{By' + Cx' + E}{Ay' + Bx' + D} \ldots \quad (\alpha).$$

Ainsi l'équation de cette tangente sera

$$y - y' = -\frac{By' + Cx' + E}{Ay' + Bx' + D}(x - x'),$$

puis, en faisant disparaître le dénominateur et réduisant au moyen de (2),

$$Ayy' + B(xy' + yx') + Cxx' + D(y + y') + E(x + x') + F = 0 \ldots . \quad (T).$$

23. Remarques I. — La direction α de la tangente au point (x', y'), se déduit facilement de (φ) : En effet, considérons séparément les termes de cette équation contenant seulement x puis y; c'est-à-dire $2Bxy + Cx^2 + 2Ex$ et $Ay^2 + 2Bxy + 2Dy$: si, maintenant, nous multiplions le coefficient de chaque terme par l'exposant de la variable considérée, tout en diminuant cet exposant d'une unité, nous aurons les résultats

$$2By + 2Cx + 2E \quad \text{et} \quad 2Ay + 2Bx + 2D.$$

Or, il est facile de reconnaître que la valeur de α, n'est autre chose que LE QUOTIENT, PRIS NÉGATIVEMENT, DE LA PREMIÈRE QUANTITÉ PAR LA SECONDE; toutefois en accentuant les coordonnées, pour indiquer qu'elles se rapportent au point de contact.

Les expressions précédentes sont dites les DÉRIVÉES de (φ) par rapport à x et à y; et dorénavant nous les désignerons par φ'_x et φ'_y pour un point quelconque (x, y) de la courbe, et par $\varphi'_{x'}$ et $\varphi'_{y'}$ pour une position spéciale (x', y') de ce point.

Ainsi l'équation (T) pourra s'écrire

$$y - y' = -\frac{\varphi'_{x'}}{\varphi'_{y'}}(x - x'),$$

ou encore

$$y\,\varphi'_{y'} + x\,\varphi'_{x'} = y'\varphi'_{y'} + x'\varphi'_{x'}.$$

II. TANGENTE PARALLÈLE A UN DES AXES COORDONNÉS. La construction d'une tangente parallèle à l'axe des X, revenant à déterminer cette droite de telle sorte que sa direction soit *nulle*, on aura évidemment

$$\varphi'_x = 0 \quad \text{ou} \quad By + Cx + E = 0 \qquad (4);$$

et, en ajoutant à cette relation celle de la courbe

$$\varphi(x, y) = 0,$$

on aura les coordonnées inconnues (x, y) du point de contact.

De même, en posant simultanément

$$5) \qquad \varphi'_y = 0 \quad \text{ou} \quad Ay + Bx + D = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = 0,$$

on aurait le point de contact de la tangente parallèle à Y, puisque cette direction doit être *infinie*.

N. B. Les solutions précédentes sont analytiques, mais elles indiquent un nouveau mode de solution plus conforme à l'esprit de la méthode de Descartes. En effet, en supposant le lieu (φ) construit, (4) et (5) caractérisent des droites passant par les points de contact des tangentes spécialement considérées; donc, en les traçant, leurs intersections avec (φ) donneraient les points de tangence, et il ne resterait plus qu'à mener par ces points des parallèles aux axes coordonnés.

24. Il est une autre méthode pour obtenir (T), et qui quelquefois s'applique plus heureusement que la précédente à une question donnée; telle serait celle-ci : *Tracer à* (φ) *une tangente parallèle à une droite déterminée.*

En effet, soit α la direction donnée, la tangente sera

$$y = \alpha x + b \qquad (6):$$

il faut maintenant obtenir b de manière que (6) coupe (φ) en deux points confondus en un seul.

Or, si nous éliminons une des variables, x par exemple, entre (6) et (φ), on obtiendra un résultat de la forme

$$Mx^2 + Nx + P = 0,$$

exigeant

$$N^2 - 4MP = 0 \qquad (7),$$

pour que la condition énoncée plus haut soit satisfaite.

Cette équation (7) du second degré en b, donnera pour cette *constante inconnue* DEUX, UNE ou ZÉRO valeurs réelles suivant que l'on aura

$$(A\alpha^2 + 2B\alpha + C)[(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)] \gtreqless 0;$$

mais, nous avons reconnu (VIIe leçon) que (φ) cessait de représenter une courbe pour

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0,$$

donc, *en général*, les tangentes seront *doubles* ou *imaginaires* pour une valeur arbitraire de α; nous disons, *en général*, car pour α satisfaisant à

$$A\alpha^2 + 2B\alpha + C = 0,$$

ou

$$\alpha = -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC},$$

il n'en existera qu'UNE SEULE; mais comme on doit aussi avoir

$$B^2 - AC > 0 \quad \text{ou} \quad B^2 - AC = 0,$$

nous devons remettre son étude à une prochaine leçon (X^e).

25. REMARQUES I. Les coordonnées (x', y') du point de contact de la tangente précédente seront évidemment données par

$$y' = \alpha x' + b \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{By' + Cx' + E}{Ay' + Bx' + D},$$

b étant déterminé par (7).

II. L'équation (7) du § précédent donnerait également α en fonction de b; c'est-à-dire résoudrait le problème suivant : *trouver la tangente à* (φ), *connaissant son ordonnée à l'origine*; et, en changeant b en $y'' - \alpha x''$ on obtiendrait la tangente passant par un point quelconque (x'', y'').

Corde des contacts.

26. La détermination d'une tangente à (φ), par un point non situé sur la courbe, nous a conduit à la résolution d'une équation du second degré; or, le caractère distinctif de la conception de Descartes, n'est pas tant de fixer *un point par ses coordonnées*, c'est-à-dire *par deux génératrices rectilignes* parallèles aux axes, que d'en fixer la position par l'intersection de lignes plus simples à obtenir dans certains cas : ainsi, en désignant par (x'', y'') le point de départ de la tangente et par (x', y') le point de contact inconnu, nous aurons les deux équations

$$\varphi(x', y') = 0 \qquad (\varphi),$$

$$Ay''y' + B(x''y' + y''x') + Cx''x' + D(y'' + y') + E(x'' + x') + F = 0 \quad (8),$$

pour déterminer x' et y'.

Or, (φ) et (8) ne sont autre chose que la courbe elle-même et une droite passant par le point cherché, donc les intersections de ces deux lieux détermineront le point de contact; de plus, on reconnaît qu'il existera, en général, *deux solutions* et qu'il ne peut y en avoir davantage.

Dans les équations précédentes, x' et y' désignent les variables des lieux (φ) et (8), et souvent on les écrit ainsi

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (\varphi),$$

C. T). $$Ay''y + B(x''y + y''x) + Cx''x + D(y'' + y) + E(x'' + x) + F = 0 \qquad (8.$$

Enfin, cette droite (8), qui, par son intersection avec (φ), donne les points de contact des tangentes à (φ) par le point (x'', y''), est désignée sous le nom caractéristique de CORDE DES CONTACTS.

Tangente commune à deux courbes.

27. Deux méthodes se présentent pour résoudre ce problème :

I. Soient (x', y') et (x'', y'') les points de contact inconnus sur les courbes (φ) et (ψ); nous aurons, pour les tangentes,

$$y - y' = -\frac{\varphi'_{x'}}{\varphi'_{y'}}(x - x') \quad \text{et} \quad y - y'' = -\frac{\psi'_{x''}}{\psi'_{y''}}(x - x'');$$

et pour les équations de condition, déterminées par la position de ces points,

$$9)\quad \varphi(x', y') = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x'', y'') = 0 \quad (10.$$

Or, ces tangentes devant se confondre, on doit avoir

$$11)\quad -\frac{\varphi'_{x'}}{\varphi'_{y'}} = -\frac{\psi'_{x''}}{\psi'_{y''}} \quad \text{et} \quad y' + \frac{\varphi'_{x'}}{\varphi'_{y'}}x' = y'' + \frac{\psi'_{x''}}{\psi'_{y''}}x'' \quad (12.$$

Ainsi les équations (9), (10), (11) et (12) détermineront x', y', x'' et y''; c'est-à-dire les points de contact inconnus.

N. B. En éliminant x'' et y'' entre (10), (11) et (12), on obtiendrait un lieu en (x', y') dont l'intersection avec (φ) donnerait ce point (x', y'); de même, l'élimination de x' et y' entre (9), (11) et (12) déterminerait une courbe en (x'', y'') coupant (ψ) au point (x'', y'').

II. L'équation de la tangente commune sera de la forme

$$y = \alpha x + \beta,$$

α et β étant inconnus.

En éliminant y entre cette relation et celle de la courbe $\varphi(x, y) = 0$, le résultat

$$\varphi(x, \alpha x + \beta) = 0,$$

devra donner pour x deux valeurs *réelles et égales*, ce qui exigera une certaine équation de condition

$$f(\alpha, \beta) = 0 \qquad (13).$$

En agissant de même pour la courbe (ψ), on aura une seconde équation

$$F(\alpha, \beta) = 0 \qquad (14);$$

alors (13) et (14) détermineront les valeurs de α et de β, et par suite la tangente demandée, qui pourra être multiple.

Contact de deux courbes.

28. *Deux courbes sont dites tangentes, lorsqu'à un de leurs points d'intersection, la tangente est commune.*

Afin de concevoir logiquement la possibilité d'un tel fait : supposons que deux courbes (φ) et (ψ) se coupent en *deux* ou *plusieurs* points (x', y'), (x'', y'')....., et qu'on fasse pivoter l'une d'elles autour d'un de ces points, (x', y') par exemple, jusqu'à ce qu'un autre (x'', y'') d'entre eux vienne se confondre avec le premier ; alors (φ) et (ψ) seront bien tangentes au point (x', y'). Les considérations précédentes indiquent suffisamment deux modes de solution.

I. Soient (x', y') le point de contact des deux courbes, nous aurons d'abord

$$(15) \quad \varphi(x', y') = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x', y') = 0 \quad (16;$$

d'un autre côté, la tangente en (x', y') étant commune, on a aussi

$$-\frac{\varphi'_{x'}}{\varphi'_{y'}} = -\frac{\psi'_{x'}}{\psi'_{y'}} \qquad (17);$$

et par suite l'élimination de x' et de y' entre (15), (16) et (17) donnera l'équation de condition demandée.

II. Les lieux (φ) et (ψ) devant avoir deux points communs confondus en un seul, il est évident qu'il suffira d'éliminer une des variables entre les équations (φ) et (ψ), puis d'établir la condition donnant, pour l'équation finale, deux racines réelles et égales, pour retrouver la même fonction que par le mode précédent.

§ II.

Suite de la tangente et de la normale.

IXe LEÇON.

SOMMAIRE.

De la normale & de son équation. — Normales parallèles aux axes coordonnés; passant par un point donné. — Hyperbole équilatère des pieds des normales. — Normale commune à deux courbes. — Courbes normales. — Qualification d'une droite par rapport à une courbe. — Forme de l'équation (φ) rapportée à des tangentes égales. — Exercices.

De la normale.

29. On désigne sous le nom de Normale, la perpendiculaire élevée *à la tangente par le point de contact;* et ce dernier est souvent appelé *pied de la normale*.

Comme il s'agit ici de droites rectangulaires entre elles, nous supposons les axes coordonnés perpendiculaires; or, si nous désignons par α' la direction de la normale au point (x', y'), nous aurons

$$\alpha' = -\frac{1}{\alpha} = \frac{\varphi'_{y'}}{\varphi'_{x'}},$$

α étant celle de la tangente au même point.

Ainsi l'équation de la normale sera

$$y - y' = \frac{\varphi'_{y'}}{\varphi'_{x'}}(x - x') \ldots \qquad \text{(N)},$$

ou, d'après la forme de (φ),

$$y - y' = \frac{Ay' + Bx' + D}{By' + Cx' + E}(x - x') \dots \quad (N).$$

30. REMARQUES I. — Si on veut obtenir la normale parallèle à l'un des axes, à X par exemple, sa direction devant être nulle, le système des lignes

$$\varphi'_y = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = 0$$

caractérisera analytiquement et géométriquement le pied de cette normale. De même,

$$\varphi'_x = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = 0$$

détermineraient les normales parallèles à Y.

II. — Si la normale devait être parallèle à la droite

$$y = ax + b,$$

on aurait pour trouver son intersection (x', y') avec la courbe

$$a = \frac{\varphi'_{y'}}{\varphi'_{x'}} \quad \text{et} \quad \varphi(x', y') = 0.$$

Hyperbole équilatère des pieds des normales.

31. La fixation d'une normale à (φ) par un point (x'', y''), non situé sur la courbe, se réduit évidemment à la résolution numérique des équations

$$\varphi(x', y') = 0 \quad \text{et} \quad y'' - y' = \frac{\varphi'_{x'}}{\varphi'_{y'}}(x'' - x'),$$

exprimant : *la première*, que le pied (x', y') de cette droite est situé sur (φ); et *la seconde*, que (x'', y'') appartient à cette normale.

D'un autre côté, sous le point de vue géométrique, le point (x', y') sera l'intersection des lieux en (x', y') déterminés par les relations précédentes, ou par

$$\varphi(x, y) = 0.$$

$$By^2 - (A - C)xy - Bx^2 + (Ax'' - By'' + E)y + (Bx'' - Cy'' - D)x + Dx'' - Ey'' = 0 \text{ (H.N)},$$

en faisant abstraction de l'accentuation des variables x' et y'.

Or, le lieu (H. N) est une courbe du second degré, désignée sous le nom d'*hyperbole équilatère*; de plus, cette ligne, qui, par son intersection avec (φ), donne le pied (x', y') cherché, passe par le point donné (x'', y''); et cela devait être, car ce point pouvait être situé sur (φ).

Enfin cette hyperbole équilatère pourra se réduire, pour des positions spéciales de (x'', y''), à deux droites convergentes (VII[e] leçon).

Normale commune à deux courbes.

32. Soient (x', y') et (x'', y'') les pieds de la normale commune à (φ) et (ψ); nous aurons, par l'identité des directions,

$$\frac{\varphi'_{y'}}{\varphi'_{x'}} = \frac{\psi'_{y''}}{\psi'_{x''}} \qquad (1).$$

Ensuite, la normale passant par les points (x', y') et (x'', y''),

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{\varphi'_{y'}}{\varphi'_{x'}} \qquad (2).$$

et enfin, par suite de la position de ces mêmes points,

$$3) \qquad \varphi(x', y') = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x'', y'') = 0 \qquad (4.$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) résolvent la question.

REMARQUE. En éliminant d'une part, x'' et y'' entre (1), (2) et (4); et d'autre part x' et y' entre (1), (2) et (3); on obtiendrait deux lieux en (x', y') et en (x'', y'') qui, par leurs intersections le premier avec (φ) et le second avec (ψ), donneraient les pieds de la normale demandée.

Courbes normales.

33. *Deux courbes sont dites normales lorsqu'à un de leurs points d'intersection, leurs tangentes sont rectangulaires.*

Les courbes (φ) et (ψ) ayant un point (x', y') commun, il vient

$$5) \qquad \varphi(x', y') = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x', y') = 0 \qquad (6.$$

D'un autre côté, les tangentes à (φ) et (ψ) étant rectangulaires au point (x', y'), on a également

$$-\frac{\varphi'_{x'}}{\varphi'_{y'}} = \frac{\psi'_{y'}}{\psi'_{x'}} \qquad (7).$$

Or, il est évident que l'élimination de x' et y' entre (5), (6) et (7) déterminera la condition demandée.

Qualification d'une droite par rapport à une courbe.

34. Qualifier une droite par rapport à une courbe : c'est déterminer si cette droite lui est *extérieure*, *tangente* ou *sécante*. Donc, si on élimine une des variables entre les équations de ces lieux, il suffira que les valeurs de l'autre variable soient *imaginaires*, *réelles* et *égales*, ou *réelles* et *inégales* pour les positions précitées de la droite.

Forme de l'équation (φ) rapportée à des tangentes égales.

38. Soit

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi)$$

la courbe rapportée à de telles droites; nous aurons, pour les coordonnées à l'origine,

$$Ay^2 + 2Dy + F = 0 \quad \text{et} \quad Cx^2 + 2Ex + F = 0;$$

et par suite

$$D^2 - AF = 0, \quad E^2 - CF = 0 \quad \text{et} \quad CD = AE,$$

pour la double condition imposée aux axes coordonnés.

Les deux premières conditions réduisent d'abord (φ) à

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2\sqrt{AF}.\,y + 2\sqrt{AF}.\,x + F = 0;$$

c'est-à-dire que telle est la forme de (φ) rapportée à deux tangentes.

Enfin, la troisième condition combinée avec les deux précédentes exigeant

$$C = A,$$

on a définitivement

$$Ay^2 + 2Bxy + Ax^2 + 2\sqrt{AF}.\,y + 2\sqrt{AF}.\,x + F = 0.$$

Exercices.

1° Déterminer la tangente au point (x', y') de

$$y^2 + 2xy + 5x^2 - 4x = 0.$$

2° La courbe

$$y^2 + xy - 2x^2 - 2y - 2x + 3 = 0,$$

a-t-elle des tangentes parallèles aux axes coordonnés?

3° Mener à

$$x^2 - 2yx - 2x + 4y - 1 = 0,$$

une tangente formant un angle de 45° avec l'axe des X positifs (axes rectangulaires).

4° Par le point $(1, +2)$ mener une tangente au lieu

$$xy + 2y + 3x - 2 = 0.$$

5° Quelle est la position de la droite

$$y = 2x - 1,$$

par rapport à la courbe

$$y^2 + 2xy + x^2 + 4y + 3x + 3 = 0?$$

6° Déterminer les constantes inconnues du lieu

$$Ay^2 - 3xy + Cx^2 + 2Dy + 2x + 4 = 0,$$

de telle sorte que cette courbe soit rapportée à deux tangentes égales.

7° Mener une tangente commune aux courbes

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{et} \quad y^2 = 2px.$$

8° Les courbes

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$$

sont-elles normales? On donne

$$a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2.$$

9° Déterminer les normales parallèles à Y de

$$3y^2 - 2xy - 5x^2 - 3y - 2x + 7 = 0.$$

§ III.

Des asymptotes.

Xe LEÇON.

SOMMAIRE.

Définition de l'asymptotisme. — Asymptotisme rectiligne. — Point asymptotique. — Méthode de la tangente. — Asymptotes rectangulaires. — Méthode générale.

36. Le terme ASYMPTOTE est l'expression consacrée pour caractériser deux lignes qui tendent constamment l'une vers l'autre, de manière à se rapprocher autant qu'on voudra, sans cependant jamais pouvoir s'atteindre; mais ordinairement, et ce sera le cas actuel, on considère spécialement les droites présentant une telle position envers certaines courbes. On comprend, du reste, que les *asymptotes rectilignes* sont éminemment propres à lever toute incertitude sur le sens de la courbure, puisque évidemment une courbe *ne pourra être que convexe vers son asymptote,* à partir du point où la tendance asymptotique se manifeste; car une ligne qui s'approcherait indéfiniment d'une droite, en lui tournant sa concavité, ne saurait éviter de la couper, à moins que son mode de génération ne lui imposât la condition de s'y arrêter : alors ce point limite pourrait être dénommé : POINT ASYMPTOTIQUE.

37. En rapprochant convenablement la définition de l'asymptote rectiligne de celle de la tangente, il est aisé de sentir que la première de ces droites, par rapport à une courbe qui, par cela même, a au moins une branche infinie, peut être envisagée comme une tangente dont le point de contact se transporte à l'infini. Tel est le principe de la première méthode des asymptotes, la seule universelle, et que nous allons appliquer aux courbes du second ordre; tout en nous

réservant d'en développer deux autres qui ne sont, ni sans intérêt philosophique, ni sans utilité pratique.

Soit (x', y') le point de contact d'une tangente à (φ), nous aurons simultanément

$$Ayy' + B(xy'+yx') + Cxx' + D(y+y') + E(x+x') + F = 0 \quad (T),$$

$$y' = -\frac{B}{A}x' - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(B^2-AC)x'^2+2(BD-AE)x'+D^2-AF} \quad (1);$$

toutefois avec les conditions $x' = \infty$ et $y' = \infty$. Or, pour introduire ces hypothèses dans (T), nous écrirons (1) de la manière suivante

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{B}{A} - \frac{D}{Ax'} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC+2.\frac{BD-AE}{x'}+\frac{D^2-AF}{x'^2}};$$

donc

$$limite\left(\frac{y'}{x'}\right) = -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC}.$$

D'un autre côté (T) peut s'écrire

$$(Ay+Bx+D)\frac{y'}{x'} + (By+Cx+E) + D\frac{y}{x'} + E\frac{x}{x'} + \frac{F}{x'} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{2}\varphi'_y.\frac{y'}{x'} + \frac{1}{2}\varphi'_x + D\frac{y}{x'} + E\frac{x}{x'} + \frac{F}{x'} = 0;$$

et par suite, en posant $x' = \infty$ et $y' = \infty$, il vient

$$\varphi'_y\left\{-\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC}\right\} + \varphi'_x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC};$$

d'où, en développant cette dernière relation,

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\left\{x\sqrt{B^2-AC} + \frac{BD-AE}{\sqrt{B^2-AC}}\right\} \quad (T_1).$$

Or, cette double droite est *imaginaire* pour

$$B^2 - AC < 0;$$

et disparaît lorsque

$$B^2 - AC = 0,$$

car pour cette hypothèse, l'ordonnée à l'origine devient *infinie*.

Ainsi, *les seules courbes du second ordre, admettant des asymptotes sont caractérisées par*

$$B^2 - AC > 0:$$

elles se nomment HYPERBOLES.

38. REMARQUES I. Les équations (T_1) ne sont autre chose que LES VALEURS DE L'ORDONNÉE DU LIEU (φ), EN SUPPOSANT CARRÉ PARFAIT LE TRINÔME EN x SITUÉ SOUS LE RADICAL DE y.

II. *Les droites* (T_1) *sont convergentes et coupent*

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A}.$$

En effet, leurs directions sont diverses et, pour l'abscisse

$$x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}} = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC},$$

l'ordonnée, d'abord double, devient celle simple de la droite

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{BE - CD}{B^2 - AC}.$$

N. B. Nous verrons, dans une des leçons prochaines, que l'intersection des droites (T_1) est *le centre* de la courbe et, tout à l'heure, *que cette dernière est composée de deux branches infinies se tournant leurs convexités.*

III. Les directions des droites (T_1) étant

$$-\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC};$$

ces droites seront rectangulaires pour

$$A + C - 2B\cos.\theta = 0,$$

θ étant l'angle des axes. Alors la courbe, admettant de telles asymptotes, est dite HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

N. B. Si $\theta = 90°$, il vient

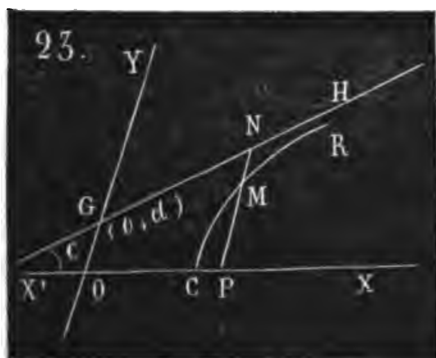
$$A + C = 0 \quad \text{ou} \quad A = -C;$$

c'est-à-dire que *les coefficients des carrés des variables doivent être égaux et de signes contraires.*

IV. En rapprochant cette étude de celle de la VII[e] leçon, on y reconnaît, ainsi que nous l'avions annoncé, que les asymptotes sont les droites auxquelles se réduit (φ) pour les hypothèses

$$B^2 - AC > 0 \quad \text{et} \quad (BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0.$$

39. 2e MÉTHODE. Soient CMR une courbe, GNH son asymptote rectiligne non parallèle à un des axes coordonnés; MP et NP les ordonnées de ces lignes, pour une même abscisse OP.



D'après la définition usuelle de l'asymptotisme, la différence MN doit diminuer indéfiniment pour des valeurs croissantes *(numériquement)* de x, et même admettre le symbole 0 pour $x = \pm \infty$: ainsi l'équation inconnue de GH étant

$$y = cx + d \qquad (1),$$

celle de la courbe devra être de la forme

$$y = cx + d + V \qquad (\varphi);$$

V étant une fonction de x disparaissant avec $x = \pm \infty$, et cela suivant que la branche CMR est dirigée suivant OX *ou* OX'.

Or, (φ) donne

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d + V}{x},$$

d'où, pour $x = \infty$ et $y = \infty$,

$$c = limite \left(\frac{y}{x}\right) \qquad (c);$$

et par suite

$$d = limite\ (y - cx) \qquad (d).$$

Ainsi les *constantes* de (1) sont complétement déterminées, mais il est évident que si (c) et (d) donnent plusieurs valeurs compatibles avec leur nature, il existera dans la courbe plusieurs branches infinies admettant des asymptotes dirigées chacune suivant OX ou OX', suivant qu'on aura posé $x = \infty$ *ou* $x = -\infty$.

De plus, afin de n'omettre aucune de ces droites, on remarquera qne celles parallèles à OX seront données par $c = 0$ et celles ayant la même position par rapport à OY correspondront à $c = \infty$; et cela résulterait encore, pour les premières, d'une valeur finie de x donnant $y = \infty$, et pour les secondes d'une expression analogue pour y déterminant $x = \infty$.

Appliquons maintenant les principes précédents aux courbes du second ordre, nous avons, en ne considérant qu'un simple radical,

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{(B^2 - AC)\,x^2 + 2\,(BD - AE)\,x + D^2 - AF},$$

d'où

$$\frac{y}{x} = -\frac{B}{A} - \frac{D}{Ax} + \frac{1}{A}\sqrt{(B^2 - AC) + 2.\frac{BD - AE}{x} + \frac{D^2 - AF}{x^2}};$$

et par suite, pour $x = +\infty$,

$$c = limite\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC} \qquad (c),$$

expression *réelle* pour $B^2 - AC \geqq 0$.

D'un autre coté

$$y - cx = -\frac{D}{A} + \frac{1}{A}\left\{\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BD-AE)x+D^2-AF} - x\sqrt{B^2-AC}\right\} = \infty - \infty,$$

pour $x = +\infty$; donc, pour obtenir sa véritable forme, multiplions et divisons l'expression entre crochets par une autre ne différant que par le signe d'une des deux quantités, il vient

$$y-cx = -\frac{D}{A} + \frac{1}{A}\cdot\frac{2(BD-AE)x + D^2 - AF}{\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BD-AE)x+D^2-AF} + x\sqrt{B^2-AC}}.$$

Or, en posant $x = \infty$, on aurait

$$limite\ (y - cx) = \frac{\infty}{\infty},$$

nouveau symbole dont l'interprétation exige d'abord qu'on divise haut et bas par le facteur devenant ∞, c'est-à-dire x, d'où

$$y-cx = -\frac{D}{A} + \frac{1}{A}\cdot\frac{2(BD-AE) + \dfrac{D^2-AF}{x}}{\sqrt{(B^2-AC)+2\dfrac{(BD-AE)}{x}+\dfrac{D^2-AF}{x^2}} + \sqrt{B^2-AC}};$$

et par suite de $x = \infty$, on a définitivement

$$d = limite\ (y - cx) = -\frac{D}{A} + \frac{BD-AE}{A\sqrt{B^2-AC}} \dots \qquad (d).$$

Ainsi l'équation de l'asymptote, correspondant à l'ordonnée déterminée par le radical pris positivement et par $x = +\infty$, sera

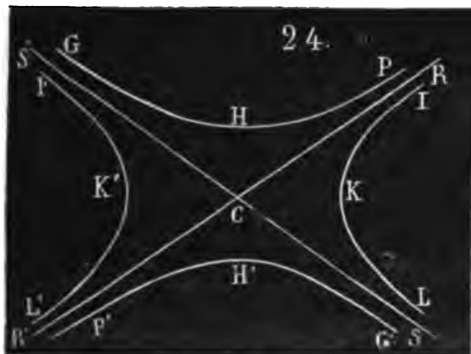
$$y = \left\{-\frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC}\right\}x + \left\{-\frac{D}{A} + \frac{BD-AE}{A\sqrt{B^2-AC}}\right\} \dots \qquad (T_1).$$

On obtiendrait, pour la même hypothèse de x,

$$y = \left\{-\frac{B}{A} - \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC}\right\}x + \left\{-\frac{D}{A} - \frac{BD-AE}{A\sqrt{B^2-AC}}\right\} \dots \qquad (T_2)$$

pour le signe — du radical de y.

Enfin, pour déterminer les droites données par $x = -\infty$, il faudra d'abord poser $x = -z$, puis faire $z = \infty$ dans les fonctions donnant c et d; toutefois, sans effectuer les calculs, on reconnaît que la division par $-z$ fera changer le signe du radical; donc, on obtiendra les mêmes équations (T_1) et (T_2), mais *en ordre inverse*, et par suite les QUATRE prétendues asymptotes se réduisent à DEUX dont chaque segment, à partir de leur point de concours, est asymptotique à une branche particulière de la courbe, ce qui donne au genre $B^2 - AC > 0$, qui ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points, une des formes IKL,, I'K'L' ou PHG, P'H'G', suivant l'angle des asymptotes contenant un point du lieu.



N. B. Cette seconde méthode n'est au fond que la première débarrassée de la notion de tangence; cependant elle présente l'avantage incontestable de faire voir d'une manière absolue que LES ASYMPTOTES RECTILIGNES D'UNE COURBE, SONT BIEN LES POSITIONS LIMITES DE SES TANGENTES, LORSQUE LE POINT DE CONTACT SE TRANSPORTE A L'INFINI.

§ III.

Suite des asymptotes.

XIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Méthode par la sécante. — Asymptotes parallèles à l'un des axes coordonnés. — Classification des courbes du second ordre au moyen des asymptotes. — Forme de l'équation d'une courbe du second ordre rapportée à ses asymptotes. — Exercices.

40. 3me MÉTHODE. Les deux modes précédents d'appréciation de l'asymptotisme rectiligne des courbes présentent une grave imperfection pratique : *La détermination d'un rapport dont les deux termes deviennent* ∞ ; aussi allons-nous exposer un autre moyen ne présentant pas cet inconvénient, et qui, en sus, se recommande essentiellement pour toutes les courbes algébriques.

En effet, considérons l'asymptote inconnue

$$y = cx + d \quad \text{et la courbe} \quad (\varphi) = 0 :$$

on déterminera c et d en exprimant analytiquement que l'équation résultant de l'élimination d'une des variables entre ces deux relations donne, pour l'autre coordonnée, *deux valeurs infinies;* en observant toutefois que c doit simplement être *réel*, mais que d ne peut admettre que des valeurs *finies et réelles*.

Or, si nous nous occupons spécialement des courbes du second ordre, il vient pour l'équation précitée, en x par exemple,

$$(Ac^2 + 2Bc + C)\,x^2 + 2\,[(Ac + B)\,d + Dc + E]\,x + Ad^2 + 2Dd + F = 0.$$

et par suite, pour que les racines de x soient *infinies*,

$$\left.\begin{aligned} Ac^2 + 2Bc + C &= 0, \\ (Ac + B)\,d + Dc + E &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} c &= -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC}, \\ d &= -\frac{D}{A} \pm \frac{BD - AE}{A\sqrt{B^2 - AC}}; \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire les mêmes valeurs que précédemment.

41. REMARQUES I. — Cette troisième méthode fait reconnaître que la direction de l'asymptote est indépendante de sa CONSTANTE LINÉAIRE d, mais que celle-ci est fonction du COEFFICIENT ANGULAIRE c; et que la réalité de ce dernier n'entraîne pas toujours l'existence de l'autre qui ne peut admettre que des valeurs *réelles* et *finies*. Ainsi le genre $B^2 - AC = 0$ n'admet point d'asymptote, quoique la direction de la tangente ait une limite, à mesure que le point de contact s'éloigne, et cela parce que l'ordonnée à l'origine de la tangente converge vers l'infini.

II. Enfin, le troisième mode déterminant des asymptotes, n'est pas toujours avantageux pour les courbes algébriques dont les équations sont surchargées de fonctions fractionnaires et surtout radicales; c'est ainsi qu'il est impuissant à constater l'existence de l'asymptote

$$x = a,$$

du lieu

$$y^2 = \frac{x^3}{x - a}.$$

Cependant, en posant

$$x = cy + d$$

pour l'asymptote, on trouverait, en éliminant x,

$$c = 0 \quad \text{et} \quad d = a.$$

N. B. Il n'est pas sans importance pratique de faire observer au lecteur que l'asymptote précédente s'obtient immédiatement en exigeant

$$y = \infty$$

d'où

$$x = a.$$

Asymptotes parallèles à l'un des axes coordonnés.

42. L'existence de ces droites sera manifeste, si une valeur finie attribuée à une variable donne l'*infini* pour l'autre. Or, une variable n'existera au dénominateur de la seconde qu'autant que cette seconde variable n'entrera qu'au premier degré dans (φ), tout en ne tombant pas dans les cas exceptionnels exposés dans la VII[e] leçon. Considérons donc successivement les deux cas généraux que les idées précédentes font naître pour les courbes du second ordre.

I. L'ÉQUATION DES COURBES DU SECOND ORDRE EST PRIVÉE DU CARRÉ D'UNE DES VARIABLES.

Soit $A = 0$, alors (φ) devient

$$2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0;$$

alors, si on considérait l'asymptote sous la forme

$$y = cx + d,$$

une des asymptotes serait omise et sans qu'on puisse le supposer; car en éliminant y, l'équation en x^2 serait de la forme

$$(2Bc + C)\,x^2 + 2Rx + S = 0,$$

et la valeur de c ne serait double qu'autant que la précédente relation serait ainsi écrite

$$(0.\,c^2 + 2Bc + C)\,x^2 + 2Rx + S = 0,$$

d'où, on aurait

$$c = \infty \quad \text{et} \quad c = -\frac{C}{2B}:$$

la première de ces valeurs de c donnerait *une asymptote parallèle à* Y; pour éviter cette omission analytique, il est préférable d'écrire

$$x = cy + d,$$

et tout le restant du calcul aurait lieu comme précédemment; mais il est encore plus avantageux de résoudre (φ) par rapport à la variable qui n'entre qu'à la première puissance, ici y; en effet, on obtient

$$y = \frac{-Cx^2 - 2Ex - F}{2\,(Bx + D)} = rx + s + \frac{t}{2\,(Bx + D)}.$$

Or

$$2\,(Bx + D) = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{D}{B},$$

caractérisera bien une asymptote parallèle à Y; car

$$y = \infty.$$

D'un autre côté

$$x = \infty$$

réduisant l'ordonnée à

$$y = rx + s;$$

on en déduit que cette seconde droite est bien l'autre asymptote.

Ainsi : LORSQUE L'ÉQUATION DU SECOND ORDRE EST PRIVÉE DU CARRÉ D'UNE DES VARIABLES, LE LIEU ADMET UNE ASYMPTOTE PARALLÈLE A L'AXE DE LA VARIABLE DONT LE CARRÉ MANQUE.

N. B. $t = 0$, *réduit la courbe à ses deux asymptotes* : en effet, on a simultanément

$$-Cx^2-2Ex-F=2(Bx+D)y \quad \text{et} \quad -Cx^2-2Ex-F=2(Bx+D)(rx+s),$$

d'où

$$(Bx+D)(y-rx-s)=0;$$

c'est-à-dire les deux asymptotes

$$Bx+D=0 \quad \text{et} \quad y=rx+s. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. L'ÉQUATION (φ) DES COURBES DU SECOND ORDRE EST DÉPOURVUE DES CARRÉS DES VARIABLES ; c'est-à-dire, revêt la forme

$$2Bxy+2Dy+2Ex+F=0.$$

En résolvant par rapport à y, on obtient

$$y=\frac{-2Ex-F}{2(Bx+D)}=s+\frac{t}{2(Bx+D)};$$

et évidemment

$$y=s \quad \text{et} \quad Bx+D=0,$$

seront les deux asymptotes ; car on obtient ces résultats en posant

$$x=\infty \quad \text{et} \quad y=\infty.$$

Ainsi dans le cas précité LES ASYMPTOTES SONT PARALLÈLES AUX AXES COORDONNÉS.

N. B. $t=0$, *réduit le lieu* (φ) *aux deux droites précédentes* : en effet, on a

$$-2Ex-F=2(Bx+D)y \quad \text{et} \quad -2Ex-F=2(Bx+D)s,$$

d'où

$$(Bx+D)(y-s)=0;$$

c'est-à-dire

$$Bx+D=0 \quad \text{et} \quad y=s \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

43. REMARQUES. De l'étude de ce § III et du précédent il résulte

I. LA COURBE DU SECOND ORDRE EST RÉDUITE A SES ASYMPTOTES POUR

$$B^2-AC>0 \quad \text{et} \quad (BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)=0.$$

II. A ET C DE SIGNES CONTRAIRES ENTRAÎNENT L'ASYMPTOTISME, PUISQUE

$$B^2-AC>0.$$

III. Les courbes du second ordre peuvent déjà se classer en trois genres :

1° $B^2-AC<0$, n'admettant pas d'asymptote, donne la présomption que ce lieu *n'a aucune portion infinie*.

2° $B^2-AC=0$, tout en repoussant l'existence de l'asymptote, ne formule ce rejet qu'avec une modification profonde : savoir que la tangente à la courbe a une direction lorsque le point de contact est situé à l'infini, et que si cette droite

disparaît cela *tient à ce que son ordonnée à l'origine devient infinie*. Donc, ce lieu *doit admettre une branche infinie*.

3° $B^2 - AC > 0$, est un genre de courbes ayant deux asymptotes rectilignes et convergentes; et comme chaque partie de ces droites se rapporte à une branche de la courbe, cette dernière *est constituée de deux parties distinctes, infinies et situées dans les angles opposés formés par ces droites*.

Forme de l'équation d'une courbe du second ordre rapportée à ses asymptotes.

44. Il est logiquement évident que les propriétés géométriques et analytiques, donnent pour la forme demandée

$$xy = constante :$$

car de

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

on déduit successivement

$$y = \infty \quad \text{et} \quad x = \infty .$$

Exercices.

45. Nous terminerons cette leçon par une série de problèmes que le lecteur est engagé à résoudre.

1° *Écrire immédiatement les asymptotes de*

$$y^2 + xy - 2x^2 - 2y - 2x + 3 = 0.$$

2° *Déterminer* A *et* C *de telle sorte que*

$$y = 2x + 3,$$

soit asymptote de

$$Ay^2 - 2xy + Cx^2 - 2y - 2x - 4 = 0.$$

3° *Construire les asymptotes de*

$$x^2 - 2xy - 2x + 4y - 1 = 0.$$

4° *Que représente*

$$x^2 + 3xy + 2y + 2x + \frac{8}{9} = 0?$$

5° *Quelles sont les asymptotes de*

$$xy + 2y + 3x - 2 = 0?$$

6° Faire disparaître les termes du premier degré et les carrés des variables de

$$3y^2 - 2xy - 2x^2 - 3y + 2x + 1 = 0,$$

par une transformation de coordonnées (les axes primitifs sont rectangulaires).

7° Déterminer, par le troisième mode, les asymptotes de

$$y^3 - 2xy^2 + x^2y - 2xy - x^2 + 3 = 0 \quad \text{et de} \quad y^3 + xy^2 - 2x^2y - xy - x^2 + 1 = 0.$$

8° Déterminer A et C de telle sorte que la courbe

$$Ay^2 - 3xy + Cx^2 - 3y - 2x + 1 = 0,$$

ait une asymptote commune avec

$$5y^2 - 2xy - 5y - 2x + 2 = 0.$$

§ IV.

Des diamètres et des axes.

XIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Définitions. — Méthodes de détermination des diamètres. — Les diamètres de la parabole sont parallèles. — Les cordes parallèles au diamètre du genre $B^2 - AC = 0$ et aux asymptotes de la courbe $B^2 - AC > 0$, n'admettent point de diamètre. — Diamètres conjugués. — Les diamètres passent par un point constant. — Le genre $B^2 - AC = 0$ n'a point de diamètres conjugués.

46. On appelle CORDE d'une courbe, toute droite limitée de part et d'autre à cette courbe; et DIAMÈTRE *le lieu des points milieux d'un système de cordes parallèles*, qui en sont dites *les cordes conjuguées*.

Tout diamètre prend le nom spécial d'AXE, lorsque ses cordes lui sont *normales;* et, dans ce cas, ses intersections avec la courbe, sont les SOMMETS de cette dernière.

La dénomination diamètre, indique une extension de la désignation usitée dans la théorie de la circonférence; on conçoit, du reste, que si chaque corde coupait la courbe en plus de deux points, on aurait un nombre de points milieux indiqué par les combinaisons deux à deux de ces intersections; et, par suite, pour un lieu du degré n, le degré du diamètre pourrait être $n\,\frac{n-1}{2}$: donc, l'étude des lignes diamétrales ne sera d'un intérêt vraiment général, que pour les lieux dont le degré n satisfera à la condition

$$n\,\frac{n-1}{2} < n \quad \text{c'est-à-dire} \quad n < 3.$$

Ainsi, cette étude se réduit, en général, à celle des courbes du second ordre : nous allons exposer les trois méthodes naturelles à cette théorie.

47. 1[er] MODE. — Soient les équations

$$\varphi)\quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \quad \text{et} \quad y = mx + n \quad (c$$

de la courbe et d'un système de cordes parallèles : n est évidemment ici *la constante variable*.

Or, l'élimination de l'ordonnée, entre ces relations, donne, pour les abscisses des points communs,

$$(Am^2 + 2Bm + C)x^2 + 2[(Am + B)n + Dm + E]x + An^2 + 2Dn + F = 0 \quad (1);$$

et, par suite, pour l'x du point central d'une quelconque de ces cordes,

$$x = -\frac{(Am + B)\,n + Dm + E}{Am^2 + 2Bm + C} \qquad (c_1).$$

Ainsi (c) et (c_1) constituent bien les deux génératrices du lieu cherché; donc, en éliminant n entre ces équations, il vient

$$(Am + B)\,y + (Bm + C)\,x + Dm + E = 0 \ldots . \quad (d)$$

pour l'équation du diamètre des cordes (c).

Ainsi *les diamètres des courbes du second ordre sont des droites.*

N. B. Le mode précédent serait d'une application pénible pour des courbes d'un degré supérieur au second; aussi recommandons-nous spécialement le suivant.

48. 2[me] MODE. — Considérons une des cordes du système (c) : transportons l'origine au point milieu (x_1, y_1) de cette corde, qui alors sera

$$y = mx,$$

avec *des extrémités ayant des coordonnées égales et des signes contraires.*

D'un autre côté, un tel changement d'origine donnera pour (φ)

$$A(y + y_1)^2 + 2B(x + x_1)(y + y_1) + C(x + x_1)^2 + 2D(y + y_1) + 2E(x + x_1) + F = 0;$$

et, par suite, pour les abscisses des points d'intersection avec la corde,

$$A(mx + y_1)^2 + 2B(x + x_1)(mx + y_1) + C(x + x_1)^2 + 2D(mx + y_1) + 2E(x + x_1) + F = 0;$$

ou

$$(Am^2 + 2Bm + C)x^2 + 2[(Am + B)y_1 + (Bm + C)x_1 + Dm + E]x + \varphi(x_1, y_1) = 0.$$

Or, cette dernière relation devant être incomplète, on doit avoir

$$(Am + B)\,y_1 + (Bm + C)\,x_1 + Dm + E = 0;$$

donc, abstraction faite de la notation des coordonnées du point (x_1, y_1), variable avec la corde,

$$(Am + B)\,y + (Bm + C)\,x + Dm + E = 0 \qquad (d)$$

est de nouveau le diamètre demandé.

3me MODE. — Les diamètres rectilignes étant les seuls réellement utiles pour la discussion des courbes, on peut encore les obtenir par une transformation oblique de coordonnées. En effet, soit

$$F\,(x, y) = 0 \qquad (1),$$

l'équation du lieu et désignons par (x_1, y_1) les coordonnées d'un point d'un diamètre rectiligne formant l'angle α avec l'axe des X, en le prenant pour nouvelle droite des abscisses et la parallèle, par le point (x_1, y_1), à sa corde conjuguée pour second axe des coordonnées; nous aurons, pour la nouvelle équation du lieu,

$$F\left\{x_1 + x \cos.\alpha + y \cos.\alpha',\ y_1 + x \sin.\alpha + y \sin.\alpha'\right\} = 0 \qquad (2).$$

Les anciens axes étant supposés rectangulaires et α' étant l'inclinaison de la corde sur l'X primitif.

Ceci posé, remarquons que (2) devra donner à y, pour toute valeur de x, des valeurs égales et de signes contraires; donc cela reviendra à égaler à *zéro* les coefficients des termes contenant *les puissances impaires* de y, à éliminer entre ces relations soit α, soit α'; puis à voir s'il n'existerait pas certaines valeurs de α' *ou* de α donnant des facteurs *linéaires* à la fonction de (x_1, y_1) qu'on obtiendrait comme résultat de cette élimination. Ces facteurs linéaires égalés à zéro donneraient les diamètres rectilignes de la courbe.

En appliquant cette méthode aux courbes du second ordre, on obtient, pour équations de condition entre x_1, y_1, α et α',

$$A \sin.\alpha \sin.\alpha' + B \sin.(\alpha + \alpha') + C \cos.\alpha \cos.\alpha' = 0,$$

$$(A \sin.\alpha' + B \cos.\alpha')\,y_1 + (B \sin.\alpha' + C \cos.\alpha')\,x_1 + D \sin.\alpha' + E \cos.\alpha' = 0;$$

ou, en divisant par $\cos.\alpha \cos.\alpha'$,

$$A tg\alpha tg\alpha' + B(tg\alpha + tg\alpha') + C = 0 \text{ et } (A tg\alpha' + B)y_1 + (B tg\alpha' + C)x_1 + D tg\alpha' + E = 0 \ (d).$$

Or, la première de ces relations indique que toute valeur de α *ou* de α' en détermine une correspondante pour α' *ou* α, et que par conséquent la seconde donne une infinité de diamètres, puisqu'elle est *linéaire* ou *du premier degré en* x_1 *et* y_1.

Enfin, la seconde relation, qui n'est *médiatement* que celle (*d*) trouvée par

l'un des modes précédents, donnant, pour la direction de ces droites,

$$\operatorname{tg.} \alpha = -\frac{B \operatorname{tg.} \alpha' + C}{A \operatorname{tg.} \alpha' + B} = -\frac{B}{A} \cdot \frac{\operatorname{tg.} \alpha' + \frac{C}{B}}{\operatorname{tg.} \alpha' + \frac{B}{A}};$$

on en déduit que ces droites ne seront parallèles que pour

$$\frac{C}{B} = \frac{B}{A} \quad \text{ou} \quad B^2 - AC = 0,$$

ce que nous retrouverons plus loin.

80. REMARQUES I. La direction de (d) variant *généralement* avec m, on reconnaît que (φ) *admet une infinité de diamètres.*

II. Le genre $B^2 - AC = 0$ n'admettant pas d'asymptote, on est conduit à introduire cette hypothèse dans (d), on en déduit

$$y = -\frac{B}{A} x - \frac{Dm + E}{Am + B};$$

c'est-à-dire que dans le genre précité *ou parabolique*, TOUS LES DIAMÈTRES SONT PARALLÈLES, et aucun système de cordes parallèles ne peut avoir $-\frac{B}{A}$ pour direction ; car alors le diamètre précédent disparaît en prenant la forme géométriquement impossible

$$y = -\frac{B}{A} x + \frac{BD - AE}{0}.$$

III. La théorie de l'asymptotisme ayant profondément caractérisé le genre $B^2 - AC > 0$, il est naturel de rechercher quelle transformation subit (d) pour un système de cordes parallèles à l'une des asymptotes, par exemple : à celle ayant pour direction

$$-\frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC}.$$

Cette substitution donne pour (d)

$$y = -\frac{B}{A} x - \frac{D}{A} + \frac{1}{A} \left\{ x \sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}} \right\},$$

c'est-à-dire que *l'asymptote serait elle-même le diamètre des cordes qui lui seraient parallèles,* ce qui est absurde. Donc, quoiqu'un diamètre s'approche de plus en plus de l'asymptote, à mesure que la direction de ses cordes est plus voisine d'une certaine limite, on ne peut dire *que l'asymptote est la limite de la situation du diamètre, puisque ce dernier ne conserve aucun de ses caractères géométriques ou naturels.*

IV. Afin de bien caractériser l'impossibilité de l'existence des diamètres pour certaines directions de cordes dans les genres $B^2 - AC \geqq 0$, nous rechercherons directement si une corde ne pourrait pas couper la courbe en UN seul point.

Or, l'intersection de la corde

$$y = mx + n \quad \text{avec} \quad (\varphi) = 0,$$

donne, pour son abscisse,

$$(Am^2 + 2Bm + C)\,x^2 + 2Rx + S = 0;$$

et les valeurs de m, satisfaisant à la condition

$$Am^2 + 2Bm + C = 0 \quad \text{ou} \quad m = -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC},$$

donneraient des cordes ne coupant (φ) qu'en UN seul point; mais comme ces cordes seraient parallèles aux diamètres dans le genre $B^2 - AC = 0$ et aux asymptotes pour $B^2 - AC > 0$, elles ne peuvent évidemment déterminer de lignes diamétrales.

N. B. Cette défectuosité de l'analyse donnant un diamètre quand ce dernier ne peut exister, provient même de sa généralité qui associe souvent des problèmes divers et dissocie parfois des questions de même nature.

Diamètres conjugués.

81. Deux diamètres sont dits CONJUGUÉS, *lorsque chacun divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; ils prennent le nom d'*AXES CONJUGUÉS, *quand ils sont rectangulaires.*

Donc, si dans l'équation (d) nous changeons m en $-\frac{Bm + C}{Am + B}$, nous obtiendrons, pour le système de deux diamètres conjugués et en coordonnées rectangulaires,

$$(d) \quad y = -\frac{Bm + C}{Am + B}x - \frac{Dm + E}{Am + B} \quad \text{et} \quad y + \frac{BE - CD}{B^2 - AC} = m\left(x + \frac{BD - AE}{B^2 - AC}\right) \quad (d').$$

L'équation (d') nous révèle des caractères géométriques très-importants et donnant lieu aux remarques suivantes :

82. REMARQUES I. — *Tous les diamètres des courbes du second ordre passent par le point constant*

$$\left[x_1 = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC}, \quad y_1 = -\frac{BE - CD}{B^2 - AC}\right],$$

qui n'est autre que le point de concours des asymptotes dans le genre hyperbolique.

II. *Le genre parabolique n'admet point de diamètres conjugués.*

III. *La droite* (d') *qui devient indéterminée pour*

$$\left.\begin{array}{r} B^2 - AC = 0, \\ BD - AE = 0, \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} B^2 - AC = 0, \\ BE - CD = 0, \end{array}\right.$$

existe encore quoique le lieu (φ) *puisse se réduire à deux parallèles imaginaires,* ou *confondues en une seule réelle.*

En effet, la première hypothèse donne pour (φ)

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{D^2 - AF};$$

c'est-à-dire deux parallèles imaginaires pour $D^2 - AF < 0$, et n'en formant qu'une pour $D^2 - AF = 0$.

Maintenant pourquoi le diamètre existe-t-il encore? cela tient à ce que les abscisses des points d'intersection de la corde avec (φ), sont *imaginaires* et *conjuguées* et que leur demi-somme est réelle ; et dans le second cas le diamètre est la droite elle-même du lieu (φ).

§ IV.

Suite des diamètres et des axes.

XIII° LEÇON.

SOMMAIRE.

Axes *ou* diamètres principaux. — Le genre $B^2 - AC = 0$ n'admet qu'un seul système de cordes principales et les autres deux systèmes conjugués. — La circonférence possède une infinité d'axes. — Parallélisme de la tangente et des cordes conjuguées du diamètre du point de contact et réciproquement. — Parallélogramme circonscrit aux courbes $B^2 - AC \lessgtr 0$. — Position des diamètres par rapport à la courbe. — De deux diamètres conjugués de l'hyperbole, un seul coupe la courbe. — Formes diverses de l'équation des courbes du second ordre par rapport aux diamètres et à leurs cordes conjuguées *ou* à deux diamètres conjugués. — Exercices.

Axes ou diamètres principaux.

83. Afin de simplifier les calculs analytiques, nous supposerons ici les axes rectangulaires, *ou* du moins rendus tels. Or, pour que le diamètre

$$(Am + B)\,y + (Bm + C)\,x + Dm + E = 0 \qquad (d)$$

soit normal à sa corde conjuguée, on doit avoir

$$-\frac{Bm + C}{Am + B} = -\frac{1}{m} \quad \text{ou} \quad m^2 - \frac{A - C}{B}\,m - 1 = 0 \qquad (1);$$

et comme cette équation a ses deux racines réelles, il en résulte que les courbes du second ordre admettent, EN GÉNÉRAL, *deux systèmes de cordes principales per-*

perpendiculaires entre elles, puisqu'on a

$$m'm'' = -1.$$

De plus, *ces mêmes courbes posséderont aussi,* EN GÉNÉRAL, *deux axes conjugués.*

84. REMARQUES I. $B^2 - AC = 0$ ayant accusé un genre de courbes dont tous les diamètres sont parallèles, il est naturel de rechercher l'influence de cette relation sur les axes, quoique nous ayons déjà reconnu que ces lieux ne pouvaient admettre de diamètres conjugués.

Or, les racines de (1) sont, dans l'hypothèse précitée,

$$m' = \frac{A}{B} \quad \text{et} \quad m'' = -\frac{C}{B} = -\frac{B}{A};$$

d'où, pour les axes de ces cordes,

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{AD + BE}{A^2 + B^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{A}{B}x - \infty :$$

donc, *ce genre de courbes n'admet qu'un seul axe parallèle à ses diamètres*, le conjugué disparaissant par le seul fait qu'il est situé à l'infini.

II. Les racines de (1) sont indéterminées pour

$$B = 0 \quad \text{et} \quad A = C.$$

En effet, dans ce cas, (φ) peut s'écrire

$$\left(y + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(x + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2};$$

et comme les axes sont rectangulaires, on reconnaît immédiatement que ce lieu est une circonférence ayant pour *centre*

$$\left[x_1 = -\frac{E}{A}, \quad y_1 = -\frac{D}{A}\right],$$

et pour *rayon*

$$R = \frac{1}{A}\sqrt{D^2 + E^2 - AF}.$$

De plus, ce cercle sera *réduit à son centre* ou *sera imaginaire* suivant que l'on aura

$$D^2 + E^2 - AF \mathrel{\substack{=\\<}} 0.$$

Du reste, cette indétermination de m est en concordance avec une propriété démontrée en géométrie élémentaire.

III. La tangente à une courbe du second ordre est déterminée, en direction, par la corde conjuguée du diamètre du point de contact. En effet :

THÉORÈME.

La tangente en un point d'une courbe du second ordre, est parallèle aux cordes conjuguées du diamètre du point de contact.

En effet, la tangente au point (x', y'), a pour direction

$$\alpha = -\frac{By' + Cx' + E}{Ay' + Bx' + D};$$

et le diamètre de ce point donne

$$(Am + B)\,y' + (Bm + C)\,x' + Dm + E = 0,$$

d'où

$$m = -\frac{By' + Cx' + E}{Ay' + Bx' + D} = \alpha.... \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

RÉCIPROQUEMENT, *le diamètre d'un système de cordes parallèles à une tangente, passe par le point de contact de cette dernière.*

En effet, les cordes parallèles à la tangente au point (x', y'), auront pour direction

$$m = -\frac{By' + Cx' + E}{Ay' + Bx' + D};$$

et comme leur diamètre est

$$(Am + B)\,y + (Bm + C)\,x + Dm + E = 0,$$

on obtient l'identité

$$m = -\frac{By + Cx + E}{Ay + Bx + D},$$

toutefois, après avoir remplaçé les variables générales par celles du point (x', y').

C. Q. F. D.

SCOLIE. Ainsi lorsque chacun des deux diamètres conjugués rencontrera la courbe en deux points, *les tangentes menées à la courbe, par les extrémités de ces droites, formeront un parallélogramme circonscrit à cette courbe.*

N. B. Il n'est pas dépourvu d'actualité de faire observer au lecteur que, pour $x' = \infty$ et $y' = \infty$, les théorèmes précédents n'ont plus lieu : soit *parce que ce point n'existe pas* $(B^2 - AC < 0)$, ou *que le diamètre disparaît* $(B^2 - AC \geqq 0)$.

Position des diamètres par rapport à la courbe.

128. Nous avons déjà reconnu que tout diamètre passait par un point constant, situé à l'infini pour $B^2 - AC = 0$. Or, il y a réellement lieu de voir si tous les diamètres rencontrent la courbe : à cet effet, m étant la direction d'une de ces droites; nous aurons, pour UN seul point d'intersection,

$$Am^2 + 2Bm + C = 0 \quad \text{d'où} \quad m = -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC}.$$

Ainsi le genre *Elliptique* $(B^2 - AC < 0)$ ne présente pas cette propriété; les diamètres de la *Parabole* $(B^2 - AC = 0)$ ne rencontrent la courbe qu'en un seul

point; enfin, la courbe dite *Hyperbole* ($B^2 - AC > 0$) exige que les cordes conjuguées soient parallèles aux asymptotes et on sait que ces cordes n'admettent pas de *diamètres conjugués*.

Maintenant si par le point d'intersection des diamètres on trace des droites dans toutes les directions, elles rencontreront :

1° Les courbes $B^2 - AC < 0$ en deux points, et par suite ces lignes sont limitées et fermées de toute part.

2° Les lieux $B^2 - AC > 0$ en deux points *ou* ne les couperont pas, et ces deux cas doivent se présenter, puisque ces lignes sont chacune composée de deux branches infinies situées dans les angles opposés formés par les asymptotes. De plus, *de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, un seul rencontre la courbe.*

En effet, soit, pour un certain diamètre,

$$-\frac{Bm+C}{Am+B} < -\frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC} \quad \text{et} \quad -\frac{Bm+C}{Am+B} > -\frac{B}{A} - \frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC}.$$

Or, A peut toujours être supposé *positif* et en considérant successivement $Am + B \gtrless 0$, il vient

$$m \gtrless -\frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC} \quad \text{et} \quad m \gtrless -\frac{B}{A} - \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC};$$

c'est-à-dire que son conjugué sera nécessairement situé dans l'angle adjacent à celui des asymptotes qui contenait le premier diamètre. C. Q. F. D.

Ces diamètres, ne rencontrant pas la courbe $B^2-AC > 0$, sont appelés, improprement il est vrai, IMAGINAIRES; quoique chacun d'eux admet bien un certain système de cordes parallèles.

3° Enfin, les diamètres du genre $B^2 - AC = 0$, ne rencontrant la courbe qu'en un seul point, cette dernière doit être ouverte dans le sens de ces parallèles et n'être formée que d'une seule branche infinie.

Forme de l'équation des courbes du second ordre rapportée à un diamètre et à sa corde conjuguée *ou* à deux diamètres conjugués.

86. Lorsqu'on prend *un diamètre pour axe des* X *et une de ses cordes conjuguées pour axe des* Y, *l'équation* (φ) *est de la forme*

$$Ay^2 + Cx^2 + 2Ex + F = 0.$$

En effet, toute valeur convenable attribuée à la variable x doit donner pour l'ordonnée deux expressions égales et de signes contraires.

De plus, si l'origine est à l'intersection du diamètre avec la courbe, le terme constant devra manquer, et la forme sera

$$Ay^2 + Cx^2 + 2Ex = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + 2px + qx^2 = 0.$$

Enfin, pour les genres $B^2 - AC \lessgtr 0$, deux diamètres conjugués étant choisis pour axes coordonnés, l'équation (φ) sera évidemment de la forme

$$Ay^2 + Cx^2 + F = 0;$$

c'est-à-dire qu'*elle sera privée des termes renfermant les variables à la première puissance.*

N. B. En considérant la forme toute spéciale

$$y^2 + 2px + qx^2 = 0,$$

on reconnaît immédiatement que le genre parabolique correspond à

$$q = 0;$$

non pas tant parce que le caractère $B^2 - AC = 0$, se transforme dans l'hypothèse indiquée, que par ce fait du diamètre rencontrant la courbe en deux points dont UN doit être situé à l'infini.

Exercices.

87. Nous terminerons cette leçon par l'énoncé de quelques problèmes.

1° Déterminer le diamètre de la courbe

$$y^2 + 2xy + 5x^2 - 4x = 0,$$

correspondant aux cordes ayant pour direction -3.

2° Trouver les équations des axes de la courbe

$$y^2 - 2xy - 2y - 2x - 4 = 0$$

(les axes coordonnés sont supposés rectangulaires).

3° La corde d'un diamètre de

$$y^2 + 2xy + x^2 + 4y + 3x + 3 = 0,$$

forme un angle de 30° avec l'axe des X positifs, quelle est l'équation de ce diamètre *(axes coordonnés rectangulaires)?*

4° Un diamètre de la parabole

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4y - 3x + 4 = 0,$$

peut-il être

$$y = -3x + 4?$$

5° Déterminer le lieu

$$Ay^2 + 3xy - 5x^2 - 3y + 2Ex + 1 = 0,$$

de telle sorte que la corde, ayant -2 pour direction, donne

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$$

pour diamètre correspondant.

6° Déterminer le diamètre de

$$y^2 - 2xy + y^2 - 3y + 2x + 1 = 0,$$

lorsque cette droite passe par le point (— 1, 2).

7° Démontrer que la bissectrice du premier et du troisième angle des axes coordonnés est un axe de la courbe, lorsque l'équation de ce lieu ne change pas en substituant x à y et y à x.

8° Une courbe a pour axe de symétrie la bissectrice du deuxième et du quatrième angle des coordonnées, lorsque son équation reste la même en changeant x en $-y$ et y en $-x$.

9° Quel est le lieu du centre des moyennes distances aux points d'intersection d'une sécante, constamment parallèle à une droite tracée, avec une courbe donnée.

(Le lecteur admettra ce principe d'analyse algébrique que la somme des racines de l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Sx - T = 0,$$

vaut — A*).*

§ V.

Du centre.

XIVe LEÇON.

SOMMAIRE.

Définition. — Deux méthodes d'appréciation pour le centre. — L'équation d'une courbe à centre, rapportée à ce point, pris pour origine, a tous ses termes du même degré; et réciproquement. — Application aux courbes du second ordre. — Le centre d'une courbe du second ordre, ne peut être un de ses points. — La tangente à une courbe du second ordre, ne peut avoir une direction indéterminée. — Remarque générale sur les théories précédentes. — Exercices.

88. On appelle CENTRE *d'une courbe, un point divisant en deux parties égales, toute corde de cette ligne passant par ce point;* et si le lieu admet plus de deux points en ligne droite, on adopte la restriction de la combinaison des points diamétralement opposés : ce cas ne peut se présenter pour les lignes du second ordre.

L'existence d'un tel point accusera la forme générale de la courbe, en la condamnant à une certaine symétrie; donc on saisira que, devant satisfaire à certaines restrictions, sa vitalité excluera certains lieux de l'équation (φ); ce qui assigne à cette théorie une importance relativement moindre qu'à aucune des précédentes. Cependant elle sert de base à la classification des courbes du second degré.

Deux méthodes peuvent être employées pour établir les conditions d'existence de ce point.

89. 1re MÉTHODE. Il résulte de la définition du *centre* d'une courbe, que ce point doit se trouver à l'intersection de tous ses diamètres : or, ces derniers, pour

les courbes (φ), étant

$$(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E=0 \quad \text{ou} \quad (Ay+Bx+D)m+(By+Cx+E)m^0=0,$$

on en déduit pour le centre, m devant être indéterminé,

$$1) \quad Ay + Bx + D = 0 \quad \text{et} \quad By + Cx + E = 0 \quad (2,$$

ou

$$1) \quad \varphi'_y = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_x = 0 \quad (2;$$

c'est-à-dire que *les équations du centre des courbes du second ordre, ne sont autres que les dérivées, par rapport aux variables, égalées à zéro, de leur équation.*

En résolvant (1) et (2), on obtient

$$x = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC}, \quad y = -\frac{BE - CD}{B^2 - AC};$$

donc, *les courbes* (φ) *à centre sont caractérisées par*

$$B^2 - AC \lessgtr 0;$$

car

$$B^2 - AC = 0,$$

en transportant ce point à l'infini, annule son existence physique.

80. REMARQUES I. Il n'est point sans importance pratique de faire observer au lecteur que la condition

$$B^2 - AC = 0$$

des paraboles, est celle *déterminant un carré parfait pour les termes du second degré de* (φ).

II. Les coordonnées du centre sont indéterminées pour

$$BD - AE = 0 \quad \text{avec} \quad B^2 - AC = 0,$$

ou

$$BE - CD = 0 \quad \text{avec} \quad B^2 - AC = 0.$$

Or, ces hypothèses (VIIe leçon) ont transformé le lieu (φ) en *deux parallèles* RÉELLES *ou* IMAGINAIRES; et même, dans le premier cas, *pouvant être confondues en une seule :* alors les équations du centre se réduisent à une seule

$$Ay + Bx + D = 0,$$

représentant une parallèle à ces droites; ce *lieu indéfini du centre*, pour le cas *même* des parallèles imaginaires, est une suite nécessaire de la forme des racines imaginaires des équations à coefficients réels.

81. 2me MÉTHODE. Le mode précédent pour déterminer le centre est tout naturel, mais son application serait souvent laborieuse pour les courbes dépassant le second ordre, aussi lui préférons-nous le suivant qui, quoique indirect, est beaucoup plus avantageux.

Il est évident que si le centre d'une courbe était pris pour origine des coordonnées, les extrémités opposées de toute droite passant par ce point *auraient des coordonnées*, DE MÊME NOM, *égales et de signes contraires;* c'est-à-dire que l'équation du lieu ne pourrait subir d'altération par le fait du changement simultané de x et y en $-x$ et $-y$. Donc, pour *les courbes du second ordre*, (φ) *devra être privée des termes de degré impair.*

En effet, soit

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi)$$

l'équation des courbes du second ordre, supposées rapportées à leur centre, comme origine; nous aurons

$$(A\alpha^2 + 2B\alpha + C)\,x^2 + 2\,(D\alpha + E)\,x + F = 0 \qquad (3),$$

pour obtenir les abscisses des points extrêmes de la sécante centrale

$$y = \alpha x.$$

Or, les racines de (3) devant être égales et de signes contraires, on doit avoir

$$D\alpha + E = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} D = 0, \\ E = 0; \end{array}\right.$$

à cause de l'indétermination de α.

Donc les termes du premier degré doivent manquer dans (φ). C. Q. F. D.

RÉCIPROQUEMENT, *si les termes du premier degré n'existent pas dans* (φ), *l'origine est le centre.*

Car (φ) ayant hypothétiquement la forme

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + F = 0,$$

(3) deviendra

$$(A\alpha^2 + 2B\alpha + C)\,x^2 + F = 0;$$

et par suite, de l'opposition des signes des valeurs (*numériquement*) égales, données par cette équation, on doit conclure que, quel que soit α, *toute corde tracée par l'origine y aura son milieu.* DONC, CE POINT EST LE CENTRE.

Ceci posé, appliquons les principes précédents à la détermination des équations du centre des courbes (φ). A cet effet, transportons l'origine au centre (x_1, y_1); nous aurons, en changeant dans (φ),

$$\left.\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right\} \text{en} \left\{\begin{array}{l} x + x_1, \\ y + y_1, \end{array}\right.$$

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + \varphi'_{y_1} \cdot y + \varphi'_{x_1} \cdot x + \varphi\,(x_1, y_1) = 0;$$

d'où, par suite des conditions précédemment imposées à cette transformée,

$$\varphi'_{y_1} = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_{x_1} = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De plus, comme on a

$$\varphi(x_1, y_1) = \frac{1}{2}\varphi'_{y_1} \cdot y + \frac{1}{2}\varphi'_{x_1} \cdot x + Dy_1 + Ex_1 + F,$$

il vient, à cause des équations du centre,

$$\varphi(x_1, y_1) = Dy_1 + Ex_1 + F;$$

et, en remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs,

$$\varphi(x_1, y_1) = \frac{(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)}{A(B^2 - AC)};$$

et par suite

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + \frac{(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)}{A(B^2 - AC)},$$

ou

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + F' = 0,$$

sera *l'équation des courbes à centre du second ordre, rapportées à ce point pris pour origine.*

THÉORÈME.

Le centre d'une courbe du second ordre ne peut être un de ses points.

En effet, l'équation (φ) peut s'écrire

$$\tfrac{1}{2}\varphi'_y \cdot y + \tfrac{1}{2}\varphi'_x \cdot x + Dy + Ex + F = 0,$$

et, par suite des équations du centre supposé sur la courbe,

$$Dy + Ex + F = 0;$$

d'où

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0.$$

Or, cette relation fait toujours (VII[e] leçon) disparaître la courbe.

COROLLAIRE. *La tangente à une courbe du second ordre, ne peut avoir une direction indéterminée.*

En effet, on ne peut avoir simultanément

$$\varphi'_y = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_x = 0,$$

pour le point de contact (x, y).

62. REMARQUES. Les théories précédentes nous donnent :

I. *Les courbes à centre du second ordre, caractérisées par*

$$B^2 - AC \lessgtr 0,$$

ont des diamètres conjugués : celles $B^2 - AC < 0$, fermées de toutes parts sont dépourvues d'asymptotes; et le genre $B^2 - AC > 0$, est composé de deux branches infinies situées dans les angles opposés formés par les deux asymptotes qu'il admet, de plus, du système de deux diamètres conjugués, un seul rencontre la courbe.

II. *Les lieux du second degré privés de centre, ont pour condition d'existence*

$$B^2 - AC = 0,$$

et sont formés d'une seule branche ouverte et infinie dans un sens; leurs diamètres sont parallèles et n'ont point de conjugués, de plus, ils rejettent les asymptotes.

Exercices.

63. Voici quelques applications concernant cette leçon.

1° Déterminer le centre de

$$y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - 4y + 4x - 6 = 0.$$

2° Construire le centre de

$$xy + 2y + 3x - 2 = 0.$$

3° Quelle est la courbe.

$$2y^2 - 3xy - 5x^2 + 2Dy + 2Ex + 2 = 0,$$

ayant $(-2, 3)$ pour coordonnées du centre?

4° Quelles sont les valeurs de a et b donnant une courbe

$$xy + ax + by - 1 = 0,$$

concentrique avec le lieu

$$y^2 + 9x^2 - 4x = 0?$$

5° Rapporter la courbe

$$y^2 - 2xy - 2y - 2x - 4 = 0$$

au centre, pris pour origine des coordonnées.

6° Quel est le lieu du centre des circonférences coupant deux droites données suivant deux cordes c et c'.

7° Quel est le lieu du centre des courbes

$$Ay^2 + 3xy - 2x^2 + 3y + 2Ex + 5 = 0,$$

admettant le diamètre commun

$$y = -x + 1?$$

§ VI.

De la similitude des courbes.

XVe LEÇON.

SOMMAIRE.

Définition. — Méthode générale d'appréciation de la similitude. — Méthode par les centres d'homothétie. — Conditions de similitude des courbes du second degré semblables de forme et de position. — Conditions de similitude des courbes semblables de forme, mais non de position. — Les fonctions à deux variables et à un seul paramètre, représentent des courbes semblables.

64. Si l'ordre logique exige, comme perfection, qu'une définition ne renferme que les énumérations strictement nécessaires à la caractérisation d'un objet, il faut convenir que cette perfection qui n'affecte que la forme et qui tient à une vue systématique de l'esprit, peut avoir de graves inconvénients en subordonnant l'un à l'autre des caractères qui occupent la même ligne dans la notion naturelle d'un objet. Ainsi, tous les hommes, même les plus étrangers aux études géométriques, ont l'idée innée de la similitude de deux figures planes *ou* solides, idée vague et confuse peut-être, mais essentiellement juste. Cette notion en comprend deux autres, heureusement indiquées par CLAIRAUT, dans ses éléments, savoir : 1° *toutes les lignes de la figure sont réduites, à la même échelle, du grand au petit;* 2° *toutes les lignes sont également situées et inclinées les unes par rapport aux autres, dans le grand comme dans le petit.*

Or, les conditions précédentes existent médiatement dans la notion innée de la similitude *ou* de la ressemblance de deux objets, et cela avant tout aperçu scienti-

fique sur un tel sujet; cependant les géomètres ont reconnu qu'il suffisait d'un nombre limité de ces conditions pour impliquer les autres et ils les ont fixées de diverses manières, au moindre nombre possible. Mais il est clair que cette disposition des prémisses et des conséquences, a dissocié ce qui naturellement se trouve associé à l'idée, puisqu'on rejette parmi des notions dérivées une notion évidemment primitive.

65. Au premier aspect la théorie de la similitude des courbes semble devoir exiger la haute analyse, où ces lignes sont considérées comme nées de polygones rectilignes; mais un examen attentif de la question, montre qu'on peut la traiter par l'analyse ordinaire en choisissant parmi les propriétés des lignes brisées semblables, celles indépendantes du nombre et de la longueur des côtés. Or, on peut obtenir, par ce moyen, deux méthodes et, quoiqu'elles ne soient pas également avantageuses, il est convenable de les apprécier toutes deux, afin de rendre cette étude indépendante de la position des courbes l'une par rapport à l'autre; et par suite d'éviter, comme on le reconnaîtra, une laborieuse transformation de coordonnées qui pourrait être inutile.

Il ne sera pas déplacé d'observer ici avant tout développement, que 1° *deux lignes ne pourront être semblables qu'autant qu'elles seront du même genre; 2° Les courbes dont l'équation pourra être réduite à ne renfermer qu'une constante* ou *paramètre arbitraire, seront semblables*. En effet, *une seule* condition de similitude aurait pour conséquence médiate d'individualiser ces courbes, c'est-à-dire de les rendre identiques.

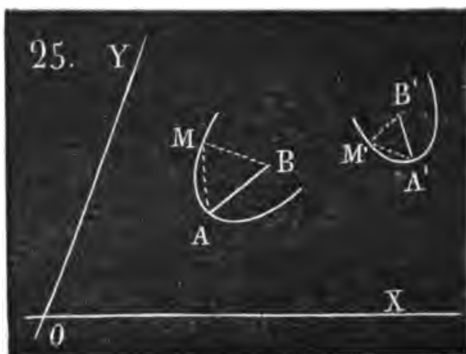
Les observations précédentes seront du reste confirmées par les développements analytiques qui vont suivre, quoique cependant on ne devra pas regarder ces derniers, comme étant leur démonstration, mais seulement comme une des bases de la correspondance entre l'analyse et toute idée géométrique susceptible d'être traduite sous la forme d'une fonction mathématique.

66. 1re MÉTHODE. Elle est fondée sur cette propriété bien connue *que les points homologues des contours semblables, sont déterminés par des triangles respectivement semblables, ayant tous, pour une même figure, une base commune; et* RÉCIPROQUEMENT *deux figures telles seront indubitablement semblables*, quel que soit le rapport de ces deux bases homologues. Or, il est évident que ce caractère s'appliquera aux courbes avec la seule restriction de le vérifier *envers un point indéterminé*, comme le permettra toujours la définition synthétique *ou* analytique de la courbe.

Afin de formuler ce qui précède, soient

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 0$$

les équations des courbes AM et A'M', AB et A'B' les deux bases homologues, dont le choix influera nécessairement sur la prolixité des calculs : menons par les extrémités homologues A et A', deux droites AM et A'M' formant des angles



égaux, l'une avec AB et l'autre avec A'B'. Or, on pourra évidemment déterminer les équations des droites BM et B'M', et par suite les angles B et B' en fonction des égaux primitifs A et A'; donc, si ces fonctions sont identiques, quel que soit A, on en concluera la similitude continue des triangles AMB et A'M'B'; et par suite celle des courbes AM et A'M'.

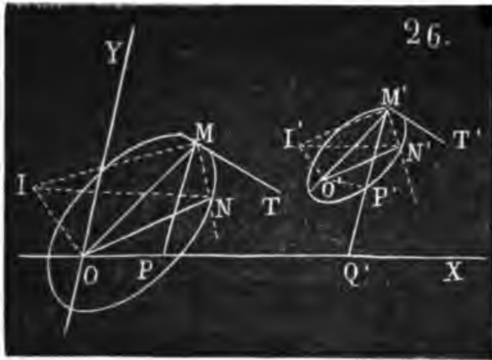
On saisit de suite que le défaut inhérent à un tel procédé, consiste dans une grande complication de calcul; cependant cette méthode ne doit pas être totalement dédaignée : car si, *pour un point particulier*, on pouvait l'appliquer facilement, on aurait quelque raison de supposer que la loi se vérifie pour un point quelconque, et alors d'essayer une transformation d'axes coordonnés pour établir sa généralité.

67. 2me MÉTHODE. Ce second mode d'appréciation est fondé sur cette remarque que les *contours semblables peuvent être placés dans une situation parallèle*, et par suite de la proportionnalité des côtés, les droites homologues devront concourir en un même point appelé CENTRE DE SIMILITUDE, CENTRE D'HOMOLOGIE, ou encore CENTRE D'HOMOTHÉTIE; enfin, ces droites, depuis le centre jusqu'à l'une et l'autre figures seront évidemment dans un *rapport constant*, qui sera aussi celui des deux contours. RÉCIPROQUEMENT, *deux figures ainsi construites seront semblables*.

Nous avons donc encore ici une condition d'homothétie *ou* de similitude applicable aux courbes, mais elle offre le grave inconvénient de mêler des relations de position aux conditions de similitude qui, par leur nature, en sont essentiellement indépendantes. Cependant, cette association entre ces éléments si divers, étant conforme à l'esprit même de la géométrie analytique, facilite le développement de cette théorie au lieu de la compliquer, ce qui arrivait par la première méthode.

On conçoit du reste que le mode précédent appliqué aux courbes, pourrait ne pas réussir, quoique les lignes fussent semblables; et cela pourrait provenir *ou* de ce que l'origine des coordonnées ne serait point au centre convenable, *ou* de ce que les figures ne seraient point parallèles. Considérons chacun de ces cas, et pour le premier : déterminons les conditions de similitude pour les courbes du second ordre.

68. Deux courbes sont dites *semblables* et *semblablement* placées lorsqu'ayant pris, dans la première, un point arbitraire O et tracé des rayons OM, ON,... à ses divers points; on peut, dans la seconde, déterminer un point O' tel que les rayons parallèles O'M', O'N', . . . aux précédents et *dirigés dans le même*



sens ou *en sens inverse*, leur soient proportionnels; c'est-à-dire que l'on ait

$$O'M' : OM :: O'N' : ON :: \ldots :: k : 1.$$

L'homothétie est DIRECTE dans le premier cas, INVERSE dans le second; et nous verrons que cela a lieu suivant que l'on a

$$k \gtrless 0.$$

Les conditions précédentes étant vérifiées pour deux points quelconques O et O', il en existe une infinité d'autres. En effet, prenons le point I et joignons OI, puis par le point O', traçons O'I' parallèle à OI et déterminons le point I' par la proportion

$$O'I' : OI :: k : 1.$$

Les triangles semblables IOM et I'O'M', ION et I'O'N donnent

$$I'M' : IM :: O'I' : OI :: k : 1 \quad \text{et} \quad I'N' : IN :: O'I' : OI :: k : 1,$$

et par suite

$$I'M' : IM :: I'N' : IN :: k : 1;$$

donc, I *et* I' *sont encore deux centres de similitude.*

Enfin, il est presque superflu de faire remarquer que dans *les courbes semblables de forme et de position*, les tangentes homologues MT et M'T' sont parallèles, comme limites des sécantes variables MN et M'N'.

Soient maintenant

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x', y') = 0 \qquad (2),$$

les équations de deux lieux semblables de forme et de position; il est évident que la similitude des triangles MOP et M'O'P' (*l'origine* O *étant un centre de similitude de* (1) *et* (α, β) *désignant les coordonnées du point homologue* O') donnera

$$\left.\begin{array}{l} O'P' : OP :: O'M' : OM :: k : 1, \\ M'P' : MP :: O'M' : OM :: k : 1, \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x' - \alpha : x :: k : 1, \\ y' - \beta : y :: k : 1; \end{array}\right.$$

et par suite

$$(x) \qquad x = \frac{x' - \alpha}{K}, \quad y = \frac{y' - \beta}{K} \qquad (y);$$

tout en remarquant que si OM et O'M' étaient tournés en sens contraires, cela reviendrait à poser $k < 0$.

Si maintenant nous substituons ces valeurs dans (1), il vient

$$\varphi\left\{\frac{x'-\alpha}{k},\quad \frac{y'-\beta}{k}\right\}=0 \quad (3);$$

et en identifiant (3) avec (2), on devra obtenir pour α et β *des valeurs réelles et finies*, et pour k *une quantité constante de forme quelconque;* de plus, il est évident que *les conditions analytiques de similitude seront les équations résultant de l'élimination de α, β et* k *entre celles déduites de l'identité de* (2) *et* (3).

69. Appliquons maintenant ce qui précède aux deux courbes du second ordre

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (1),$$

$$A'y'^2 + 2B'x'y' + C'x'^2 + 2D'y' + 2E'x' + F' = 0 \qquad (2);$$

d'où, en substituant les valeurs (x) et (y) du § précédent,

$$\left.\begin{array}{r|r|l} Ay'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 - 2A\beta & y' - 2B\beta & x' + A\beta^2 \\ -2B\alpha & -2C\alpha & +2B\alpha\beta \\ +2Dk & +2Ek & +C\alpha^2 \\ & & -2Dk\beta \\ & & -2Ek\alpha \\ & & +Fk^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots (3)$$

et, en divisant maintenant (2) par A′ et (3) par A, on obtient, pour les conditions d'identité des termes du second degré,

$$\frac{B'}{A'}=\frac{B}{A},\quad \frac{C'}{A'}=\frac{C}{A};\quad \text{d'où}\quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=h\ \ldots\ldots \quad (4);$$

et, pour les termes du premier degré,

$$(5)\quad A\beta + B\alpha = Dk - D'h \quad \text{et} \quad B\beta + C\alpha = Ek - E'h \quad (6).$$

Le terme indépendant des variables donne

$$A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 - 2Dk\beta - 2Ek\alpha + Fk^2 = F'h,$$

ou, en réduisant au moyen des relations (5) et (6), multipliées la première par β et la seconde par α, et ensuite combinées par voie d'addition,

$$(Dk + D'h)\,\beta + (Ek + E'h)\,\alpha = Fk^2 - F'h \qquad (7).$$

Or, ces cinq relations donnent, pour les conditions analytiques d'homothétie,

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=h \quad \text{ou} \quad A=A'h,\ B=B'h,\ C=C'h;$$

c'est-à-dire que ***deux courbes du second ordre seront semblables de forme et de position, lorsque les coefficients des termes du second degré seront proportionnels.***

Des équations (4), on déduit

$$B^2 - AC = h^2(B'^2 - A'C');$$

c'est-à-dire ce fait déjà énoncé : que les courbes semblables doivent être du même genre, puisque les binômes $B^2 - AC$ et $B'^2 - A'C'$ sont *de même signe*. De plus, h étant indéterminé pour le cas de deux paraboles, *ces dernières courbes sont toujours semblables*.

Enfin, la direction des diamètres de (1) étant identique à celle des droites analogues de (2), et cela par suite des relations (4), il s'ensuit que *les diamètres homologues de* (1) *et* (2) *sont parallèles;* et on reconnaîtra facilement que *ces droites sont proportionnelles*, en considérant spécialement deux courbes à centre, rapportées à deux diamètres conjugués.

Il nous reste maintenant à calculer α, β et k : or, (5) et (6) donnent d'abord

$$(\alpha) \qquad \alpha = \frac{B(Dk-D'h)-A(Ek-E'h)}{B^2-AC}, \quad \beta = \frac{B(Ek-E'h)-C(Dk-D'h)}{B^2-AC} \qquad (\beta);$$

d'où, en substituant ces valeurs dans (7), il vient

$$k = h^2\sqrt{\frac{(B'D'-A'E')^2-(B'^2-A'C')(D'^2-A'F')}{(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}} \quad \ldots\ldots (k).$$

Le radical devra être pris *positivement* ou *négativement*, suivant que la similitude sera *directe* ou *inverse*.

En substituant cette valeur de k dans (α) et (β), on aurait la position du centre de similitude qui, dans (2), correspondrait à l'origine, dans (1). Du reste, *k pourrait être imaginaire, sans que α et β cessassent d'être réelles.*

Supposons maintenant que (1) et (2) soient paraboliques, ou

$$B^2 - AC = 0 \quad \text{et} \quad B'^2 - A'C' = 0,$$

on obtient

$$k = h^2 \cdot \frac{B'D' - A'E'}{BD - AE},$$

et, par des transformations bien connues,

$$\alpha = \frac{0}{0} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{ED' - DE'}{DB' - EA'};$$

c'est-à-dire que O' *est indéterminé* et convient à tous les points de la droite

$$y = \frac{ED' - DE'}{DB' - EA'}.$$

70. Examinons maintenant le cas où non-seulement les courbes ne sont pas homothétiques, mais encore celui où *les rayons proportionnels font entre eux un angle δ connu* ou *inconnu;* alors, il est évident qu'il suffira de faire tourner le

le système des coordonnées de δ pour établir le parallélisme, et de transporter l'origine en O' pour faire coïncider les rayons homologues ; c'est-à-dire qu'il faudra dans (1) changer

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} \alpha + \dfrac{x \sin.(\theta - \delta) - y \sin.\delta}{\sin.\theta}, \\ \beta + \dfrac{x \sin.\delta + y \sin.(\theta + \delta)}{\sin.\theta}; \end{matrix}\right.$$

et identifier la transformée avec celle

$$\psi(kx, ky)$$

donnée par (2), en y substituant kx et ky à la place de x' et y'.

Si les équations de condition, donnent des relations indépendantes de α, β, k et δ, ce seront celles de similitude ; et si α, β, k et δ ont des valeurs compatibles avec leur nature, on pourra conclure que

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x', y') = 0$$

sont *deux lieux semblables de forme*, mais *non de position*.

71. Soit maintenant

$$\pi(x, y, p) = 0$$

dépendant d'un seul paramètre, en changeant simultanément x, y et p en kx, ky et pk, on obtient

$$\pi(kx, ky, kp) = 0;$$

ou, m étant le degré de la fonction primitive, toujours supposable homogène,

$$k^m \cdot \pi(x, y, p) = 0,$$

donc

$$\pi(x, y, p) = 0;$$

c'est-à-dire le lieu primitif. Donc, *toutes ces courbes sont semblables.*

En considérant spécialement les paraboles, dont l'équation, ainsi que nous le verrons, peut se réduire à la forme

$$y^2 = 2px,$$

on reconnaît qu'elles sont toutes semblables, et que *l'origine et l'axe sont à la fois un point et une droite homologues de ces lignes.*

Enfin, la remarque philosophique de CLAIRAUT prouve que toute similitude exige *autant de conditions moins une* qu'il en faut réellement pour construire la courbe.

Ainsi, comme nous verrons plus tard que les axes des courbes $B^2 - AC \lessgtr 0$ déterminent ces lieux, *les courbes à centre du second ordre, seront semblables lorsque leurs axes seront proportionnels.*

§ VII.

Des foyers et des directrices.

XVIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Définition d'Euler, de Bret. — Détermination de deux lieux géométriques donnant les foyers. — Théorèmes sur le nombre de conditions imposé à (φ) par la connaissance : d'un foyer; d'une directrice; de la valeur de ρ; du foyer situé sur $f(x, y) = 0$; de la directrice tangente à $f(x, y) = 0$. — Forme générale de l'équation des courbes semblables *ou* identiques — Rapport spécifique d'Aug. Comte. — Examen du cas où l'équation focale est privée du rectangle des variables. — Exercices.

72. Cette théorie toute spéciale aux courbes du second ordre, n'est pas aussi importante, sous le point de vue général, que chacune des précédentes; cependant elle est historiquement remarquable, comme se rapportant aux recherches des anciens géomètres, pour déterminer un moyen continu de description de ces lignes.

Le célèbre Euler désigna sous le nom de foyer *d'une courbe, un point dont la distance à un point quelconque du lieu, est une fonction rationnelle, entière et linéaire de l'abscisse de ce dernier point.* Cette définition n'est exacte que pour un système tout particulier de coordonnées; aussi, M. Bret, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, la modifia-t-il. Voici sa définition :

Le foyer d'une courbe est tel que sa distance à un point quelconque de cette courbe, est une fonction entière, rationnelle et linéaire des coordonnées de ce point.

73. Les courbes du second ordre ont non-seulement des foyers; mais, *pour*

chaque foyer, elles admettent une certaine droite, appelée DIRECTRICE.

En effet, soit (α, β) le foyer et δ sa distance à un point (x', y') quelconque de (φ); nous aurons, les axes étant rectangulaires,

$$\delta = \sqrt{(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2}:$$

mais cette fonction, devant être rationnelle, entière et linéaire, sera de la forme

$$\mu y' + \nu x' + \pi.$$

D'un autre côté, si nous considérons la droite

$$\mu y + \nu x + \pi = 0,$$

nous aurons, pour sa distance au point (x', y'),

$$\delta' = \frac{\mu y' + \nu x' + \pi}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}.$$

Ainsi, *la distance d'un point de la courbe à la droite précédente, est également une fonction rationnelle, entière et linéaire des coordonnées de ce point.*

De plus, le nom de *Directrice* donné à cette droite, est justifié par la proportion

$$\delta : \delta' :: \sqrt{\mu^2 + \nu^2} : 1,$$

qui indique que *les distances d'un point quelconque du lieu au foyer et à la directrice correspondante, sont dans un rapport constant.*

RÉCIPROQUEMENT, *si une droite*

$$\mu y + \nu x + \pi = 0$$

et un point (α, β), *sont tels que le rapport de leurs distances à un point* (x', y') *quelconque, soit constant; ce point* (α, β) *sera un foyer.*

En effet, par hypothèse

$$\delta : \delta' :: \rho : 1,$$

et comme

$$\delta' = \frac{\mu y' + \nu x' + \pi}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}};$$

il vient

$$\delta = \rho\, \frac{\mu y' + \nu x' + \pi}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}.$$

Donc, δ étant de même nature que δ', (α, β) est bien un foyer.

74. REMARQUE. Il n'est pas sans importance pratique de faire observer au lecteur que : LA DIRECTRICE A POUR ÉQUATION, LA DISTANCE ÉGALÉE A ZÉRO, D'UN POINT DE LA COURBE AU FOYER; ET QUE LE RAPPORT DES DISTANCES D'UN POINT DU LIEU AU FOYER ET A LA DIRECTRICE, VAUT LA RACINE CARRÉE DE LA SOMME DES CARRÉS DES COEFFICIENTS DES VARIABLES DE L'ÉQUATION DE LA DIRECTRICE.

75. Déterminons maintenant simultanément les foyers et les directrices. Or, nous avons d'une part, les axes étant rectangulaires,

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\mu y+\nu x+\pi \qquad (1),$$

et, d'autre part,

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \qquad (\varphi);$$

pour la représentation analytique des courbes du second ordre, considérées sous le double point de vue des foyers et en elle-même; et ces deux équations exigent pour leur identification :

$$\frac{1-\mu^2}{\alpha^2+\beta^2-\pi^2}=\frac{A}{F}=A',\ \frac{-\mu\nu}{\alpha^2+\beta^2-\pi^2}=\frac{B}{F}=B',\ \frac{1-\nu^2}{\alpha^2+\beta^2-\pi^2}=\frac{C}{F}=C' \qquad (2),$$

$$\frac{-\beta-\mu\pi}{\alpha^2+\beta^2-\pi^2}=\frac{D}{F}=D' \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha-\nu\pi}{\alpha^2+\beta^2-\pi^2}=\frac{E}{F}=E' \qquad (3).$$

Ces cinq équations (2) et (3) donneront, par l'élimination de μ, ν et π, deux lieux en (α, β) déterminant les foyers. A cet effet, posons

$$\alpha^2+\beta^2-\pi^2=\sigma:$$

il vient, en employant les extrêmes des relations (2),

$$(\mu) \qquad \mu=\sqrt{1-A'\sigma} \quad \text{et} \quad \nu=\sqrt{1-C'\sigma} \qquad (\nu);$$

d'où, en substituant dans la seconde des équations (2),

$$(B'^2-A'C')\,\sigma^2+(A'+C')\,\sigma-1=0 \ \ldots\ldots \ (4).$$

Discussion des valeurs de σ. Nous remarquons d'abord que $B^2-AC=(B'^2-A'C')\,F^2$, ainsi

$$B^2-AC \lesseqgtr 0 \quad \text{correspond à} \quad B'^2-A'C' \lesseqgtr 0.$$

Ceci posé, la forme de l'équation (4) nous donne, pour σ, des valeurs constamment RÉELLES : *de même signe que* $A'+C'$ *pour* $B^2-AC<0$; *de signes contraires* pour $B^2-AC>0$; et

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\infty,\\ \sigma&=\frac{1}{A'+C'},\end{aligned}\right\}\ \textit{pour}\ \ B^2-AC=0.$$

76. Maintenant éliminons π entre les équations (3) : en remplaçant μ et ν par leurs valeurs, en fonction de σ, il vient

$$\beta\sqrt{1-C'\sigma}-\alpha\sqrt{1-A'\sigma}=(E'\sqrt{1-A'\sigma}-D'\sqrt{1-C'\sigma})\,\sigma \qquad (5),$$

ou

$$(\beta + D'\sigma)\sqrt{1 - C'\sigma} - (\alpha + E'\sigma)\sqrt{1 - A'\sigma} = 0 \quad (5');$$

c'est-à-dire *deux droites se coupant au point constant*

$$(-E'\sigma, -D'\sigma);$$

de plus, il n'y a que deux droites, car les radicaux sont de même signe *ou* de signes contraires, et ces droites n'existent que pour

$$1 - C'\sigma > 0 \quad \text{et} \quad 1 - A'\sigma > 0.$$

Enfin, si dans la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2 = \sigma,$$

on remplace π par sa valeur, déduite des équations (3), on obtient

$$(\mu^2 - 1)\beta^2 + \mu^2\alpha^2 - 2D'\sigma\beta - D'^2\sigma^2 - \mu^2\sigma = 0 \quad (6),$$

$$\nu^2\beta^2 + (\nu^2 - 1)\alpha^2 - 2E'\sigma\alpha - E'^2\sigma^2 - \nu^2\sigma = 0 \quad (7);$$

c'est-à-dire deux courbes du second ordre, à cause du couple des valeurs de σ, *se coupant suivant les foyers cherchés.*

Mais, comme ces foyers appartiendront aussi à la ligne provenant de la combinaison par addition de (6) et (7) : on aura, par cette transformation,

$$(\mu^2+\nu^2-1)\beta^2+(\mu^2+\nu^2-1)\alpha^2-2D'\sigma\beta-2E'\sigma\alpha-[(D'^2+E'^2)\sigma^2+(\mu^2+\nu^2)\sigma]=0 \quad (8);$$

c'est-à-dire *une circonférence*, dont les intersections avec (5'), donneront les foyers.

77. Le lecteur comprend qu'une prolongation de discussion conduirait à des calculs très-prolixes, par exemple celui qui établirait la position de (5') par rapport à (8), et n'aurait évidemment aucune utilité réelle; aussi préférons-nous tirer partie de (1), dénommée ordinairement *équation focale des courbes du second ordre,* et des relations (2) et (3) pour obtenir (φ) d'après certaines conditions; et cette dernière fonction ne contient réellement que CINQ CONSTANTES, puisquê l'on peut toujours réduire l'un des coefficients de (φ) à l'unité et évidemment le moins important est F.

THÉORÈME I.

La connaissance d'un foyer assujettit (φ) *à* DEUX *conditions.*

En effet, l'élimination des constantes inconnues μ, ν et π entre (2) et (3), donnera DEUX équations pour déterminer les cinq coefficients de (φ); et par suite, il ne suffira plus que de *trois* conditions pour obtenir cette fonction.

THÉORÈME II.

Une directrice astreint la courbe du second ordre, à DEUX *exigences.*

Soit la directrice donnée

$$\mu y + \nu x + \pi = 0,$$

et par suite les rapports $\nu : \mu$ et $\pi : \mu$; on pourra obtenir ν et π en fonction de μ, puis éliminer α, β et μ entre (2) et (3) ; donc, *deux* équations, comme dans le théorème précédent.

SCOLIE. Ainsi *un foyer et sa directrice ne laissent qu'une indéterminée dans* (φ).

THÉORÈME III.

Le rapport $\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ *des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice, équivaut à* UNE *condition.*

Car, en remplaçant ν en fonction de ρ et de μ, il suffira d'éliminer α, β, μ et π pour obtenir une seule relation entre les cinq coefficients de (φ).

THÉORÈME IV.

Une courbe du second ordre appartient au genre Élliptique, Parabolique ou *Hyperbolique, suivant que pour le rapport précédent, on a*

$$\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \lesseqgtr 1.$$

En effet, les équations (2) donnent

$$B^2 - AC = \frac{F^2}{(\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2)^2} \times \left\{ \mu^2 + \nu^2 - 1 \right\};$$

et par suite

$$B^2 - AC \lesseqgtr 0 \quad \textit{revient à} \quad \mu^2 + \nu^2 \lesseqgtr 1.$$

THÉORÈME V.

Le foyer appartenant à un lieu f (x, y) = 0, *donne* UNE *condition pour* (φ).

En effet, on aura

$$f(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = f(\alpha),$$

et, par suite, l'équation focale (1) devient

$$(x - \alpha)^2 + [y - f(\alpha)]^2 = (\mu y + \nu x + \pi)^2;$$

c'est-à-dire qu'elle ne renferme plus que *quatre constantes.*

THÉORÈME VI.

La directrice tangente à f (x, y) = 0, *équivaut à une restriction pour* (φ).

En effet, en éliminant une des variables entre l'équation de la directrice

$$\mu y + \nu x + \pi = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0,$$

on obtiendra une équation de condition entre μ, ν et π établissant le contact de ces lignes; donc, on pourra substituer π en fonction de μ et ν dans (1), ce qui ne laissera plus que quatre constantes α, β, μ et ν.

THÉORÈME VII.

Deux courbes du second degré seront semblables, pour $\sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \sqrt{\mu'^2 + \nu'^2}$.

En effet, on doit avoir pour la première

$$\delta : \delta' :: \sqrt{\mu^2 + \nu^2} : 1 \quad \text{et} \quad \delta_1 : \delta'_1 :: \sqrt{\mu'^2 + \nu'^2} : 1$$

pour la seconde; d'où, à cause de l'hypothèse,

$$\delta : \delta_1 :: \delta' : \delta'_1.$$

Ainsi *les droites homologues étant proportionnelles, les courbes seront semblables.*

SCOLIES I. En désignant par ρ le rapport constant $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ des courbes semblables, on en déduit, pour l'équation générale de ces dernières,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (\mu y + x\sqrt{\rho^2 - \mu^2} + \pi)^2;$$

et comme cette fonction ne renferme plus que *quatre indéterminées*, il faut AUTANT DE CONDITIONS MOINS UNE qu'il en était besoin pour leur égalité.

II. De plus, en désignant par p la distance du foyer à la directrice $\mu y + \nu x + \pi$, $= 0$, on aura

$$p\rho = p\sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \mu\beta + \nu\alpha + \pi,$$

d'où

$$\pi = p\rho - \mu\beta - \alpha\sqrt{\rho^2 - \mu^2};$$

et par suite, p et ρ étant constants,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = [\mu(y - \beta) + (x - \alpha)\sqrt{\rho^2 - \mu^2} + p\rho]^2,$$

pour l'équation des courbes identiques du second ordre.

78. REMARQUES I. L'usage de l'équation focale (1), est d'un emploi facile, élégant et de beaucoup préférable à celui de la forme (φ).

II. Le rapport constant $\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ pour les courbes semblables, a été dénommée SPÉCIFIQUE, par AUG. COMTE.

79. L'équation focale

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\mu y+\nu x+\pi)^2 \quad \text{ou} \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\mu^2\left(y+\frac{\nu}{\mu}x+\frac{\pi}{\mu}\right)^2$$

fait reconnaître spontanément que le rectangle des variables ne peut disparaître que pour $\mu = 0$ *ou* $\nu = 0$; c'est-à-dire tant que la directrice ne sera pas perpendiculaire à l'axe des X *ou* des Y. Ainsi, *la distance d'un point de la courbe au foyer, sera* GÉNÉRALEMENT *rationnelle envers les deux variables.*

De plus, nous avons reconnu que, pour un système d'axes coordonnés, les courbes du second ordre admettaient la forme

$$y^2 + 2px + qx^2 = 0;$$

alors nécessairement

$$\mu = 0 \quad \text{avec} \quad \beta = 0:$$

ainsi l'axe des X contiendrait le foyer et serait perpendiculaire à la directrice.

Le lecteur reconnaîtra facilement que la forme précédente des courbes (φ) n'admet pas

$$\nu = 0,$$

qui serait au contraire la conséquence de

$$x^2 + 2py + qy^2 = 0.$$

Donc, dans l'un et l'autre de ces cas, cela reviendra à remplacer dans

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$

y en fonction de x *ou* réciproquement au moyen de (φ), puis à déterminer α et β de telle sorte que le résultat soit rationnel et fonction entière de x *ou* de y : seulement l'inconvénient de cette méthode, employée exclusivement à tout autre, est l'incertitude de la situation de la directrice qu'on sait seulement être parallèle à l'un des axes; et par suite la nécessité d'effectuer quelquefois une double substitution. Cet inconvénient n'enlève rien à la grande simplication que présente son usage.

Exercices.

1° Déterminer les foyers et les directrices de

$$y^2 + 2xy + 5x^2 - 4x = 0.$$

2° Quelle est la courbe du second ordre, ayant $(-2, 1)$ pour foyer et passant par les points $(1, 0)$, $(0, 2)$ et $(-3, -4)$?

3° Déterminer le lieu ayant $(-1, -3)$ pour foyer, $3y - 2x - 5 = 0$ pour directrice et passant par le point $(-2, +5)$.

4° Trouver le lieu dont le foyer est situé sur la droite $3y - x + 1 = 0$, admet pour directrice $4y - 2x - 1 = 0$ et passe par les points $(0, -2)$ et $(3, 0)$.

5° Quels sont les foyers et les directrices de

$$25y^2 - 16x^2 = -400?$$

6° Quel est le lieu du foyer des courbes du second ordre, ayant une directrice donnée et passant par deux points donnés?

7° Déterminer le lieu du foyer *ou* du centre des hyperboles admettant deux droites données pour asymptotes.

§ VIII.

Des courbes que renferme (φ).

XVIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Classification générale. — Trois genres : 1° Elliptique *ou* $B^2 - AC < 0$; 2° Parabolique *ou* $B^2 - AC = 0$; 3° Hyperbolique *ou* $B^2 - AC > 0$. — Variétés des genres précédents.

Classification générale.

80. Les théories précédentes ont déjà caractérisé trois genres de courbes du second ordre : il nous reste à établir qu'il n'y en a point d'autres.

L'équation générale

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi),$$

donne

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF}.$$

Or, cette valeur, de l'ordonnée de (φ), est composée de deux parties, la première, rationnelle, n'est autre que l'y de la droite

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \ldots. \ (d);$$

et comme son expression doit être augmentée, puis diminuée de

$$\frac{1}{A}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF},$$

pour déterminer les points du lieu; il en résulte que (d), médiatrice des cordes de la courbe parallèles à Y, est bien *un diamètre.*

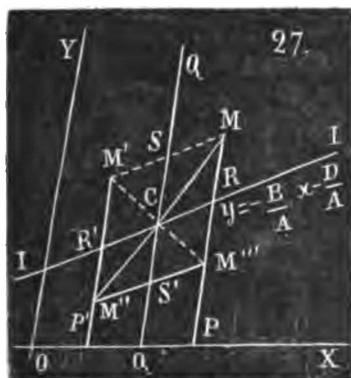
D'un autre côté, l'y de (φ) pouvant s'écrire

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{\left(x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BD-AE}{\sqrt{B^2-AC}}\right)^2 + \frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}}$$

on reconnaît facilement que

$$x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BD-AE}{\sqrt{B^2-AC}} = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{BD-AE}{B^2-AC} \; \ldots\ldots \qquad (d'),$$

est *le conjuguée* de (d).



En effet, soit II la droite (d), et QQ celle (d'); en posant

$$x = -\frac{BD-AE}{B^2-AC} \pm x_1,$$

nous déterminerons les points de la courbe qui correspondent aux abscisses OP et OP′, si $QP = QP' = x_1$; et comme le radical de y se réduit à

$$\pm\frac{1}{A}\sqrt{(B^2-AC)\,x_1^2 + \frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}},$$

on aura

$$MR = M'''R = M'R' = M''R';$$

et par suite MM′M″M‴ est un parallélogramme : donc, *les cordes* MM′, M″M‴ *sont parallèles au diamètre* II, *et elles sont les conjuguées de* QQ; car Q est le milieu de PP′. Ainsi QQ ou (d') *est bien le conjugué de* II ou (d).

Il est important de faire remarquer au lecteur que (d) existe toujours, mais que son conjugué (d') exige que l'on ait

$$B^2 - AC \lesseqgtr 0.$$

Ainsi les genres dits ELLIPTIQUE *et* HYPERBOLIQUE *sont les seuls admettant des diamètres conjugués et des parallélogrammes inscrits.*

De plus, le point de rencontre

$$\left[-\frac{BD-AE}{B^2-AC},\; -\frac{BE-CD}{B^2-AC}\right]$$

des diamètres (d) et (d') est le *centre* de la courbe : car, en joignant MC et M''C, l'égalité des triangles MCR et M''CR' donne

$$\widehat{MCR} = \widehat{M''CR'} \quad \text{et} \quad MC = M''C;$$

c'est-à-dire que toute corde MM'' passant par le point C, est divisée, par ce point, en deux parties égales. Donc, *ce point* C *est bien le centre*.

81. Reprenons la discussion générale de l'ordonnée de la courbe qui, d'après ce qui précède, est réduite à l'examen de *sa partie irrationnelle*, dénommée ORDONNÉE COMPTÉE A PARTIR DU DIAMÈTRE, et que nous écrirons

$$Y = \pm \frac{1}{A} \sqrt{(B^2 - AC)\,x^2 + 2\,(BD - AE)\,x + D^2 - AF.}$$

Cette ordonnée, à partir de II, sera nulle pour les abscisses données par

$$(B^2 - AC)x^2 + 2\,(BD - AE)\,x + D^2 - AF = 0 \qquad (1),$$

et comme on ne peut admettre pour x que des valeurs vérifiant

$$(B^2 - AC)\,x^2 + 2\,(BD - AE)\,x + D^2 - AF > 0;$$

deux cas généraux se présentent : ce trinôme en x est de degré *impair* ou *pair;* c'est-à-dire

$$B^2 - AC = 0 \quad \text{et} \quad B^2 - AC \lesssim 0.$$

Dans le premier cas, *les diamètres ne rencontrent la courbe qu'en un seul point*, et le lieu (φ) doit être ouvert dans le sens de ces droites, lesquelles auront une direction unique; car autrement la courbe ayant plusieurs branches ouvertes dans divers sens, une droite pourrait la rencontrer en plus de deux points, ce qui est contre la nature même des courbes du second ordre.

Enfin, lorsque $B^2 - AC \lesssim 0$, *les diamètres auront deux intersections avec la courbe,* ou *ne la rencontreront pas :* dans ce dernier cas, ces droites sont improprement qualifiées d'IMAGINAIRES.

82. La loi de succession des valeurs de Y ne saurait être la même dans les trois hypothèses spéciales que donnent les deux cas généraux dont nous venons de parler. Examinons les rapidement :

I. $B^2 - AC < 0$.

Cette hypothèse exige (VII[e] leçon) que les racines de (1) soient réelles et inégales, car tout autre système réduit (φ) à *un point* ou à *un lieu imaginaire*. Or, en désignant par x' et x'' ces racines réelles, *toute valeur de* x *non comprise entre* x' *et* x'' *devra être rejetée*, parce qu'elle rendrait Y *imaginaire;* et par suite (φ) ne peut s'étendre au-delà de l'espace compris entre les droites.

$$x = x', \quad x = x''.$$

Au contraire, *toute valeur de* x *comprise entre* x' *et* x'' *donne pour* Y *une expression réelle.*

Ainsi le genre $B^2 - AC < 0$, est tel *que le lieu* (φ) *sera limité entre deux parallèles à l'axe des ordonnées, ainsi que dans le sens des* Y; puisque des valeurs finies substituées à x, ne peuvent rendre infinie la forme entière de l'ordonnée de la courbe.

Ce genre est appelé ELLIPTIQUE.

II. $B^2 - AC = 0$.

Nous avons ici

$$Y = \pm \frac{1}{A}\sqrt{2\,(BD - AE)\,x + D^2 - AF},$$

et comme (VII[e] leçon) on doit avoir

$$BD - AE \gtrless 0;$$

il en résulte que x, devant satisfaire à la condition

$$2\,(BD - AE)\,x + D^2 - AF \overset{=}{>} 0;$$

acceptera tous les états de grandeur depnis

$$-\frac{D^2 - AF}{2\,(BD - AE)} \quad \textit{jusqu'à} \quad \pm\infty,$$

suivant que l'on aura

$$BD - AE \gtrless 0.$$

Ainsi *cette courbe s'étend à l'infini dans un seul sens de l'axe des* X, *et cela à partir de sa section avec le diamètre* (d).

Ce genre de courbe du second ordre est celui PARABOLIQUE.

III. $B^2 - AC > 0$.

Dans ce cas, nous avons reconnu (VII[e] leçon) que les racines de (1) pouvaient être *inégales* ou *imaginaires;* examinons ces cas particuliers.

1° x' ET x'' RÉELLES ET INÉGALES. Le signe du coefficient de x^2 rejette pour x les valeurs comprises entre x' et x'', et admet toutes celles non intercalées entre les mêmes limites.

Ainsi *le lieu* (φ) *s'étend à l'infini en dehors des parallèles*

$$x = x' \quad \text{et} \quad x = x'',$$

tant dans le sens des x *positifs que dans le sens opposé; donc cette ligne est composée de deux branches se tournant leurs convexités*, car autrement une droite pourrait la rencontrer en plus de deux points.

2° x' ET x'' IMAGINAIRES. Alors la courbe ne coupe point le diamètre (d), mais le signe de $B^2 - AC$ permet d'admettre pour x une valeur réelle quelconque; et par suite *le lieu* (φ) *s'étend sans discontinuité dans les deux sens de l'axe des* X.

D'un autre côté, comme Y peut s'écrire

$$Y = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\left(x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BD-AE}{\sqrt{B^2-AC}}\right)^2+\frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}},$$

on reconnaît, à cause du signe de la partie indépendante de x, que

$$x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BD-AE}{\sqrt{B^2-AC}}=0 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{BD-AE}{B^2-AC}$$

donne

$$minimum\ Y = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}};$$

c'est-à-dire *qu'il n'existera aucun point de* (φ) *entre les parallèles*

$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{D}{A}\pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}}.$$

Ainsi, dans ce cas particulier, le genre $B^2 - AC > 0$, appelé HYPERBOLIQUE, n'a point subi de modifications radicales.

83. REMARQUES I. Les racines de (1) réduisant l'ordonnée de la courbe à l'une des valeurs simples.

$$y=-\frac{B}{A}x'-\frac{D}{A} \quad \text{et} \quad y=-\frac{B}{A}x''-\frac{D}{A},$$

on en déduit qu'en ces points, l'*ordonnée est tangente au lieu* (φ); et nous retrouvons ce théorème : LA TANGENTE A UNE COURBE DU SECOND ORDRE, EST PARALLÈLE AUX CORDES CONJUGUÉES DU DIAMÈTRE DU POINT DE CONTACT.

II. Dans le genre $B^2 - AC < 0$, les droites

$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{D}{A}\pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}}$$

sont tangentes à la courbe.

III. Ces deux dernières droites sont également tangentes au lieu $B^2 - AC > 0$, si toutefois x' et x'' sont imaginaires.

84. En résumé, *l'équation* (φ) *n'admet que trois genres de courbes.*

I. Les ELLIPSES, courbes limitées en tous sens et dont les caractères analytiques sont

$$B^2-AC<0 \quad \text{avec} \quad (BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)>0;$$

et admettant comme cas particuliers :

1° *Un point*,	caractères :	$B^2 - AC < 0,\quad (BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)=0;$
2° *Lieu imaginaire*,		$B^2 - AC < 0,\quad (BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)<0.$

N. B. Pour le premier de ces cas particuliers, on dit souvent que *l'ellipse* ou *le cercle est réduit à son centre*.

II. Les PARABOLES, formées chacune d'une branche infinie et pour lesquelles on a

$$B^2 - AC = 0 \quad \text{et} \quad BD - AE \gtrless 0.$$

Ce genre contient encore

1° *Deux parallèles*,	exigeant	$B^2 - AC = 0,\quad BD - AE = 0$ et $D^2 - AF > 0;$
2° *Une droite unique*,		$B^2 - AC = 0,\quad BD - AE = 0$ et $D^2 - AF = 0;$
3° *Deux parallèles imaginaires*,		$B^2 - AC = 0,\quad BD - AE = 0$ et $D^2 - AF < 0.$

N. B. Le cas de la droite unique doit être conçu sous le point de vue de *deux droites confondues en une seule*.

III. Les HYPERBOLES, lieux composés chacun de deux branches infinies se tournant leurs convexités et dont les conditions d'existence sont

$$B^2 - AC > 0 \quad \text{avec} \quad (BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) \gtrless 0;$$

et admettant comme variété unique *deux droites convergentes* caractérisées par

$$B^2 - AC > 0,$$
$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0.$$

N. B. Cette variété est dite : *Hyperbole réduite à ses asymptotes*.

Nous allons maintenant procéder à la construction de chacun de ces trois genres de courbes.

§ VIII.

Construction des courbes que renferme (φ).

XVIIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

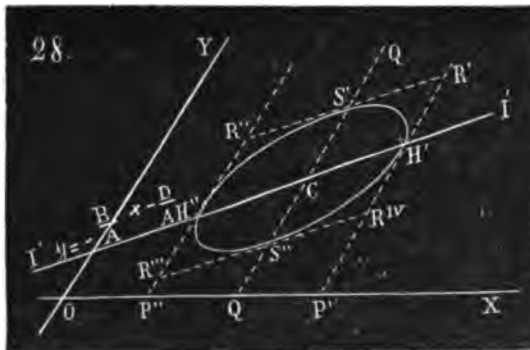
Construction de l'Ellipse; exercices. — Construction de l'Hyperbole et de sa conjuguée; exercices. — Construction de la Parabole; exercices.

Construction de l'Ellipse.

$$\{ B^2 - AC < 0 \quad \textit{avec} \quad (BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) > 0 \}.$$

88. Reprenons l'ordonnée de (φ), savoir :

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF};$$



et soit II le diamètre

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \qquad (d),$$

dont les points d'intersection avec la courbe sont donnés par les racines réelles de

$$(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF = 0 \qquad (1).$$

Donc, on aura ces points H′ et H″ en prenant

$$OP' = x' \quad \text{et} \quad OP'' = x'';$$

puis, traçant P′H′ et P″H″ parallèlement à l'axe des Y. De plus, ces dernières droites sont des tangentes à (φ).

Afin de reconnaître la forme de la courbe, nous écrirons

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} \cdot \sqrt{(x' - x)\ (x - x'')}.$$

Ceci posé, on voit immédiatement que x n'admet que les valeurs intercalées entre x' et x''; c'est-à-dire que (φ) est entièrement située entre les parallèles P′H′ et P″H″. En outre, la forme entière de y implique *un maximum* pour cette variable, puisque x est une valeur finie. En effet, *la somme constante*

$$x' - x''$$

des facteurs variables x′ — x *et* x — x″, *exige pour cette limite*

$$x - x'' = x' - x;$$

d'où

$$x = \frac{x' + x''}{2} = \frac{OP' + OP''}{2} = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC} = OQ;$$

et par suite, en traçant QQ parallèle à l'axe des Y et prenant

$$CS' = CS'' = \frac{x' - x''}{2A}\sqrt{AC - B^2},$$

nous aurons les points S′ et S″ de la courbe, les plus éloignés de II; et le lieu sera tangent aux parallèles R′R″, R‴ R^iv menées par S′, S″ au diamètre II.

Nous savons du reste que II et QQ sont des diamètres conjugués et que leur intersection C *est le centre;* enfin, leurs longueurs sont

$$S'S'' = \frac{\sqrt{(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)\ (D^2 - AF)}}{A\sqrt{AC - B^2}},$$

pour QQ; et on obtiendrait facilement H′H″, au moyen des coordonnées des extrémités H′ et H″.

Enfin, *la forme* de la courbe sera celle indiquée (fig. 28), car ce lieu continu ne peut être *ni sinueux, ni convexe* vers le centre, sans perdre sa propriété caractéristique de ne pouvoir rencontrer une droite en plus de deux points.

86. REMARQUE. La définition vulgaire de la circonférence établit instantanément que son équation est du second degré; et, comme des courbes de cet ordre, le genre *Elliptique* est le seul fermé de toute part, il doit la renfermer comme *forme spéciale*. En effet, en supposant les axes rectangulaires et

$$A = C \quad \textit{avec} \quad B = 0,$$

on a

$$Ay^2 + Ax^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

ou

$$\left(y + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(x + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2};$$

c'est-à-dire *un lieu dont chaque point* (x, y) *est distant du point* $\left(-\frac{E}{A}, -\frac{D}{A}\right)$ *de la quantité constante* $\frac{1}{A}\sqrt{D^2 + E^2 - AF}$. C. Q. F. D.

Exercices.

87. Voici quelques courbes à construire et à discuter :

1° $y^2 - 2xy + 3x^2 - y + 2x - 7 = 0$.

2° $y^2 - 4xy + 5x^2 - 2y + 2x + 2 = 0$.

3° $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 3 = 0$.

4° $y^2 + x^2 - 4y + 2x = 0$ *(axes rectangulaires, puis obliques).*

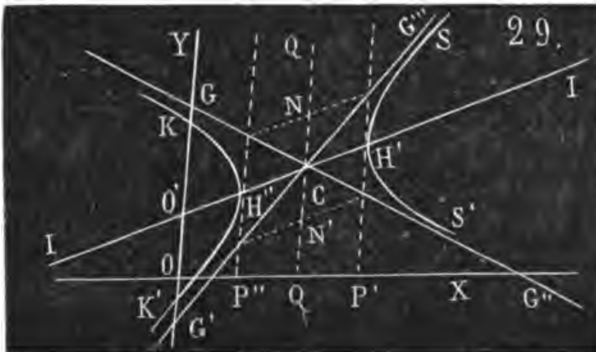
5° $3y^2 + xy + x^2 + 2y + 4 = 0$.

Construction de l'Hyperbole.

$$\left\{ B^2 - AC > 0 \quad \textit{avec} \quad (BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) \gtrless 0 \right\}.$$

88. 1er CAS. $(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) > 0$. L'ordonnée de ($\varphi$) donne d'abord le diamètre II ou

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \dots \quad (d),$$



dont les points d'intersection avec la courbe seront donnés par

$x' = OP'$ et $x'' = OP''$:

x' et x'' étant les racines réelles de

$$(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF = 0 \qquad (1).$$

Ainsi se trouvent fixés les points H' et H'', où le lieu est tangent à son ordonnée ; puis, pour la suite de la construction, nous écrirons

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\sqrt{(x - x')(x - x'')}.$$

La forme précédente de l'ordonnée exclu immédiatement les valeurs de x intercalées entre x' et x'', et admet au contraire toutes les autres ; donc, la courbe s'étend

à l'infini à droite du point H' et à gauche de H'', *tant au-dessus qu'au-dessous du diamètre* II.

En conservant la marche générale observée à la XVIIe leçon, on reconnaîtra facilement que la droite QQ déterminée par

$$x = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{BD - AE}{B^2 - AC} = OQ,$$

est le diamètre conjugué de II et qu'il ne peut rencontrer la courbe; de plus, que l'intersection C de ces droites est le *centre.*

Enfin, comme ce genre de courbe admet deux asymptotes, il est utile de commencer par construire ces droites

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\left\{ x\sqrt{B^2 - AC} + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}} \right\} :$$

à cet effet, le centre C étant un de leurs points, il suffira de porter sur OY, à partir de son intersection O' avec II,

$$O'G = O'G' = \frac{BD - AE}{A\sqrt{B^2 - AC}},$$

pour déterminer encore un point de chacune d'elles qui seront alors CG et CG'; et par suite le lieu sera constitué par les deux branches infinies SH'S' et KH''K' asymptotiques aux droites G'CG''' et GCG''.

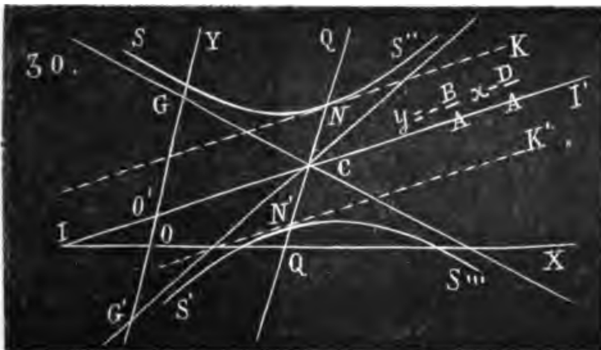
N. B. On porte souvent sur QQ, à partir du centre C,

$$CN = CN' = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)}{B^2 - AC}},$$

qu'on regarde comme la demi-longueur du diamètre imaginaire QQ.

2me CAS. $(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) < 0$. Ici, les racines de

$$(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF = 0 \qquad (1),$$



étant *imaginaires*, la courbe ne rencontre pas le diamètre II, donné par

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A}.$$

D'un autre côté, une valeur *réelle* quelconque attribuée à x, spécifie pour l'ordonnée de (φ) une forme réelle; donc le lieu s'étend indéfiniment dans les deux sens de l'axe des abscisses.

Enfin, pour déterminer les points de (φ) les plus voisins de II, nous écrirons l'ordonnée, comptée à partir du diamètre, de la manière suivante

$$Y=\pm\frac{1}{A}\sqrt{\left\{x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BD-AE}{\sqrt{B^2-AC}}\right\}^2+\frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}};$$

et on reconnaît immédiatement que

$$x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BD-AE}{\sqrt{B^2-AC}}=0 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{BD-AE}{B^2-AC}=OQ,$$

donne

$$\textit{minimum}\ Y=\frac{1}{A}\sqrt{\frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}};$$

et par suite en portant sur QQ, conjugué de II,

$$CN=CN'=\frac{1}{A}\sqrt{\frac{(B^2-AC)(D^2-AF)-(BD-AE)^2}{B^2-AC}},$$

on aura les points N et N′ les plus proches de II; c'est-à-dire ceux où les tangentes à la courbe sont NK et N′K′ parallèles à II.

La construction du lieu s'achèvera aisément, en traçant primitivement les asymptotes CG et CG′, au moyen du centre C et des points G et G′, où elles coupent l'axe des ordonnées, et pour lesquels on a

$$O'G=O'G'=\frac{BD-AE}{A\sqrt{B^2-AC}}.$$

89. REMARQUE. Les deux courbes précédentes sont du même genre *hyperbolique*, car elles ont les mêmes caractères géométriques; et lorsqu'on les considère simultanément : elles sont dites HYPERBOLES CONJUGUÉES, ont les mêmes asymptotes et les mêmes diamètres; toutefois avec cette profonde distinction que *les lignes diamétrales réelles de l'une sont imaginaires dans l'autre et réciproquement.*

Exercices.

90. Déterminer et construire

1° $y^2-4xy+x-6=0$.

2° $2y^2-4xy-3x^2-2y-2x+4=0$.

3° $4y^2-x^2-2x+1=0$.

4° $4y^2-8xy+3x^2-4y+6x-4=0$.

Construction de la Parabole.

$$\left\{\ B^2-AC=0, \quad BD-AE \gtrless 0.\ \right\}$$

91. L'ordonnée de la courbe se réduit à

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{2(BD - AE)x + D^2 - AF};$$

et la droite

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \dots \quad (d)$$

sera encore le diamètre des cordes parallèles à l'axe des Y; donc

$$2(BD - AE)x + D^2 - AF = 0 \qquad (1),$$

donnera *le point unique* d'intersection de (φ) et (d); l'autre intersection s'étant transportée à l'infini, par suite de $B^2 - AC = 0$.

Enfin, il est évident que toute abscisse satisfaisant à

$$2(BD - AE)x + D^2 - AF > 0,$$

déterminera pour y des valeurs *réelles;* et que la courbe s'étendra en deux branches, douées d'une symétrie relative par rapport à (d), dans *une* des directions de l'axe des X, à partir du point

$$\left[y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A}, \quad x = -\frac{D^2 - AF}{2(BD - AE)}\right];$$

mais afin de bien discerner la position de cette courbe par rapport aux axes coordonnés, nous supposerons

$$BD - AE > 0,$$

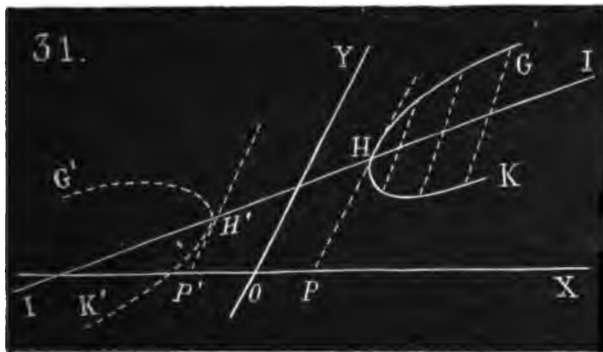
car pour

$$BD - AE < 0,$$

il suffirait de changer la direction des abscisses positives.

Ceci posé, il nous reste à considérer successivement les trois cas suivants :

$$D^2 - AF < 0, \quad D^2 - AF = 0, \quad D^2 - AF > 0.$$



1er CAS : $D^2 - AF < 0$. Nous avons, pour l'intersection de II, avec la courbe,

$$x = -\frac{D^2 - AF}{2(BD - AE)} = OP > 0;$$

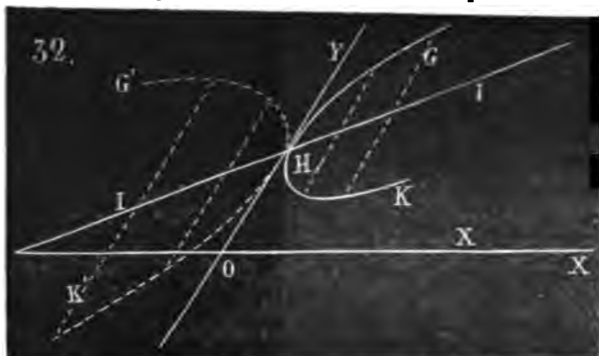
et par suite le point H où le lieu est tangent à l'ordonnée.

Les autres points de (φ) seront déterminés par

$$2(BD - AE)x + D^2 - AF > 0 \quad \text{ou} \quad x > OP.$$

Ainsi la courbe s'étend à l'infini dans le sens des abscisses positives, à partir du point H, ce qui donne GHK.

N. B. La ligne G'H'K' serait celle correspondante à BD — AE < 0.



2me CAS : $D^2 - AF = 0$. Ici l'intersection de (d) avec (φ), est donnée par

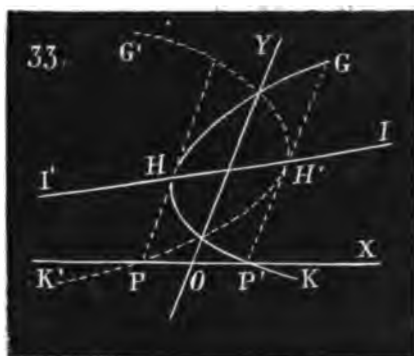
$$2(BD - AE)x = 0 \text{ ou } x = 0;$$

c'est-à-dire que le point H est sur OY; et comme pour les autres points, on doit avoir

$$2(BD - AE)x > 0 \quad \text{ou} \quad x > 0,$$

on en déduit GHK pour la ligne demandée.

N. B. G'HK' serait le lieu pour BD — AE < 0.



3me CAS : $D^2 - AF > 0$. Le point d'intersection du diamètre (d), est alors en H, donné par

$$x = -\frac{D^2 - AF}{2(BD - AE)} = OP < 0,$$

et les autres points par

$$x > OP;$$

c'est-à-dire qu'on obtient GHK.

N. B. Si on avait BD — AE < 0, on obtiendrait G'H'K'.

92. REMARQUE. Quoique la parabole soit formée de deux branches infinies, prolongement l'une de l'autre, nous avons reconnu qu'elle n'admettait point d'asymptote et cela tenait à cette circonstance spéciale que l'ordonnée à l'origine de cette droite, devenait infinie pour la position limite de la tangente, malgré que cette dernière droite s'approche de plus en plus d'être parallèle aux diamètres de la courbe.

Exercices.

93. Discuter

1° $y^2 + 2xy + x^2 + 4y + 3x + 3 = 0.$

2° $y^2 + 2xy + x^2 - 2y - 2x - 1 = 0.$

3° $4y^2 - 4xy + x^2 + 2y - x + 2 = 0.$

4° $4y^2 - 4xy + x^2 - 4y + 2x + 1 = 0.$

§ VIII.

Suite de la construction des courbes que renferme (φ).

XIX° LEÇON.

SOMMAIRE.

Formes spéciales de (φ) : B = 0; A = 0; A = 0 & C = 0; A = 0 & B = 0. — Exercices. — Résumé de la construction des courbes du second ordre.

Formes spéciales de l'équation (φ).

94. Nous allons maintenant examiner les cas où l'équation des courbes du second ordre, est privée de certains termes.

I. $B = 0$.

L'équation est alors

$$Ay^2 + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0:$$

on en déduit

$$y = -\frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{-AC.\,x^2 - 2AE.\,x + D^2 - AF},$$

ou

$$y = -\frac{D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{\left(x\sqrt{-AC} - \frac{AE}{\sqrt{-AC}}\right)^2 + \frac{(D^2 - AF)\,C + AE^2}{C}}.$$

La première forme accuse une *ellipse* ou une *hyperbole*, suivant que A et C *sont de même signe* ou *de signes contraires;* et détermine le diamètre, parallèle à l'axe des X,

$$y = -\frac{D}{A} \ldots\ldots \qquad (d).$$

La seconde forme de l'ordonnée donne, pour *le diamètre conjugué* de (d),

$$x\sqrt{-AC} - \frac{AE}{\sqrt{-AC}} = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{E}{C} \qquad (d).$$

Les droites (d) et (d') déterminent le *centre* de la courbe.

Le reste de la construction du lieu s'effectuerait comme précédemment, et il serait facile de vérifier que des deux diamètres (d) et (d'), *un seul* rencontre la courbe lorsque A et C sont de signes opposés.

II. $A = 0$.

Alors, on a

$$2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0;$$

et, dans ce cas, comme il est préférable de résoudre par rapport à la variable y, qui n'entre qu'à la première puissance, on obtient

$$y = \frac{-Cx^2 - 2Ex - F}{2(Bx + D)} = rx + s + \frac{t}{2(Bx + D)}.$$

Or, au titre des asymptotes, nous avons vu que ces droites étaient

$$y = rx + s \quad \text{et} \quad Bx + D = 0;$$

et qu'elles constituaient le lieu pour le cas de

$$t = 0.$$

Donc, en omettant logiquement cette variété de (φ), si nous construisons d'abord ces droites GG′ et KK′ qui déterminent le *centre* C de la courbe; et que nous posions



$$x = OP,$$

l'ordonnée PN de GG′ devra être augmentée de

$$\frac{t}{2(B.\overline{OP} + D)},$$

pour obtenir un point M du lieu, en supposant négative l'expression précédente; d'où l'on déduira la branche SMS′, en faisant décroître x depuis

$$+\infty \quad \text{jusqu'à} \quad Bx + D = 0;$$

tandis qu'en faisant croître *numériquement* x depuis

$$Bx + D = 0 \quad \text{jusqu'à} \quad -\infty,$$

on fixera l'autre branche RM′R′.

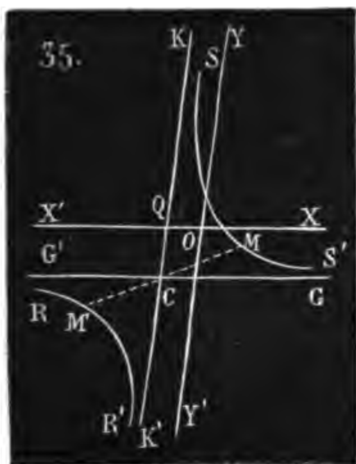
III. $A = 0, \quad C = 0$

Ici nous avons

$$2Bxy + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

d'où

$$y = \frac{-2Ex - F}{2(Bx + D)} = s + \frac{t}{2(Bx + D)}.$$



Les asymptotes sont donc

$$y = s \quad \text{et} \quad Bx + D = 0;$$

c'est-à-dire qu'elles sont parallèles aux axes coordonnés ; et le tracé de ces droites GG', KK' permettra celui des deux branches SMS' et RM'R' de la courbe.

Dans notre figure, nous avons supposé que la partie fractionnaire restait *constamment positive* depuis

$$x = +\infty \quad \text{jusqu'à} \quad Bx + D = 0;$$

et par opposition, elle sera *toujours négative* de

$$x = -\infty \quad \text{à} \quad Bx + D = 0.$$

IV. $A = 0, \quad B = 0.$

L'équation (φ) devient

$$Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

donc, en la résolvant par rapport à x,

$$x = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-2CDy + E^2 - CF};$$

et par suite on reconnaît que les diamètres de cette parabole sont parallèles à l'axe des Y, puisque l'un d'eux est

$$x = -\frac{E}{C}.$$

Du reste, la courbe se construirait comme dans le cas général de (φ) ; mais nous allons exposer un autre mode de tracé ne manquant ni d'élégance, ni de caractère.

En effet, en résolvant par rapport à la variable qui n'entre qu'à la première puissance, on a

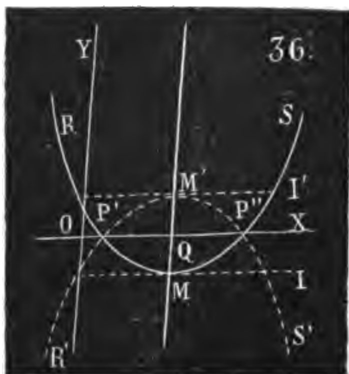
$$y = -\frac{C}{2D}x^2 - \frac{E}{D}x - \frac{F}{2D} = ax^2 + 2bx + C;$$

et nous supposerons $a > 0$: car pour $a < 0$, il suffirait de changer la direction des Y positifs.

Or, les points de section de l'axe des X avec la courbe sont donnés par

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad (1);$$

et évidemment nous aurons les *trois* cas particuliers suivants :



1er CAS : $b^2 - ac > 0$. Alors (φ) coupe OX en deux points P′ et P″, donnés par

$$OP' = x' \quad \text{et} \quad OP'' = x'';$$

x' et x'' étant les racines réelles de (1).

Ceci posé, l'ordonnée y peut s'écrire

$$y = a(x - x')(x - x'');$$

et par suite, depuis

$$x = OP' \quad \text{jusqu'à} \quad x = OP'',$$

y sera constamment *négatif*. De plus, en écrivant

$$y = -a(x - x')(x'' - x);$$

puis, posant

$$x - x' = x'' - x \quad \text{ou} \quad 2x = x' + x'' = 2.OQ,$$

on obtient *numériquement*

$$\textit{Maximum } y = -a\left(\frac{x'' - x'}{2}\right)^2 = QM.$$

Ainsi, de

$$x = OP' = x' \quad \text{jusqu'à} \quad x = OP'' = x'',$$

on détermine la portion P′MP″ de la courbe.

Enfin de

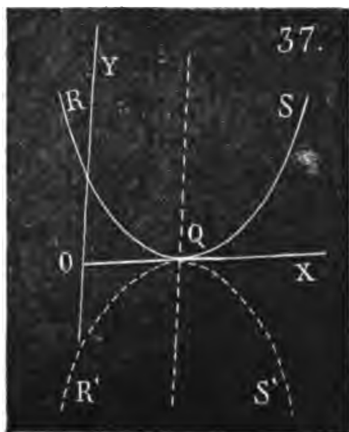
$$x = x' = OP' \quad \text{à} \quad x = -\infty,$$

y croît de 0 à $+\infty$, d'où la branche P′R ; et de

$$x = x'' = OP'' \quad \text{à} \quad x = +\infty,$$

la continuation de MP″, c'est-à-dire P″S.

N. B. La ligne ponctuée R′M′S′ serait celle correspondante à l'hypothèse de $a < 0$.



2me CAS. $b^2 - ac = 0$. La parabole est alors tangente à l'axe des X, au point Q pour lequel

$$OQ = x' = x'';$$

et l'ordonnée affecte la forme

$$y = a(x - x')^2.$$

Donc de

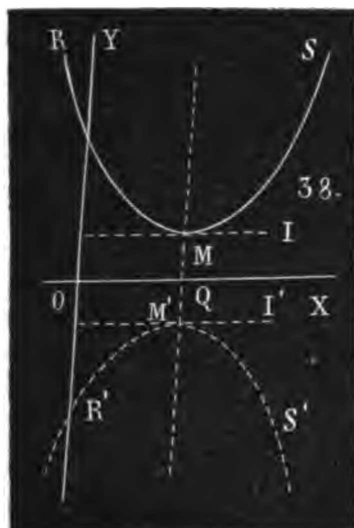
$$x = OQ = x' \quad \text{jusqu'à} \quad x = +\infty$$

on déduit QS; tandis que la partie QR se détermine par x variant de

$$OQ \quad \textit{à} \quad -\infty.$$

Le tout constitue la ligne RQS.

N. B. R'QS' serait la caractérisation géométrique de (φ) pour $a < 0$.



3me cas. $b^2 - ac < 0$. Les racines de (1) sont *imaginaires* et la courbe ne rencontre pas l'axe des X; de plus, comme x peut passer par tous les états de grandeur sans troubler la réalité de y, il y a lieu de déterminer le *minimum numérique* de y. Or, on a

$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} \right\};$$

et par suite

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a} = OQ,$$

donne

$$Minimum\ y = \frac{ac - b^2}{a} = QM.$$

Ainsi le lieu sera *tangent en* M *à la parallèle* MI *à* OX et sera RMS pour $a > 0$; et évidemment R'M'S', lorsque l'on aurait $a < 0$.

95. REMARQUES I. La parabole tourne donc *sa convexité* vers la partie *inférieure* ou *supérieure* de son plan suivant que l'on a $a \gtrless 0$.

II. Dans les hypothèses

$$B = 0 \quad \text{et} \quad C = 0,$$

la courbe serait disposée par rapport à l'axe des Y, comme elle l'était par rapport à OX, dans *le cas précédent*.

Exercices.

96. Construire les courbes.

1° $x^2 - 3xy - 2x + 10 = 0$.

2° $5xy - 8y + 6x - 5 = 0$.

3° $y^2 - 4xy + x - 6 = 0$.

4° $x^2 - 3x + 2y + 1 = 0$.

5° $x^2 - 2xy + 4y - 3x + 2 = 0$.

6° $xy - 3y - 3x + 9 = 0$.

Résumé de la construction des courbes du second degré.

97. Pour discuter *une équation numérique du second ordre et à deux variables*, il faut appliquer directement les théories précédentes, et non pas s'astreindre

à former les conditions analytiques du genre de courbes et de leurs variétés. Ainsi, il faut, une des variables entrant au carré,

1° RÉSOUDRE PAR RAPPORT A CETTE VARIABLE;

2° OBSERVER LE SIGNE DU COEFFICIENT DU CARRÉ DE L'AUTRE VARIABLE QUI SE TROUVE SOUS LE SIGNE RADICAL, CE QUI FIXE LE GENRE;

3° DÉTERMINER LA NATURE DES RACINES DU RADICAL ÉGALÉ A ZÉRO, CE QUI FAIT CONNAÎTRE S'IL Y A COURBE OU SEULEMENT VARIÉTÉ.

Si une des variables n'entre qu'à la première puissance, il est préférable d'obtenir cette variable en fonction de l'autre, et on en déduit immédiatement le genre *parabolique* ou *hyperbolique*, suivant que les rectangles des variables manque ou existe; et, dans le second cas, les asymptotes sont parallèles aux axes coordonnés dont le carré manque.

---

§ IX.

Réduction de (φ).

XXe LEÇON.

SOMMAIRE.

Courbes à centre. — Disparition du rectangle des variables. — Equation de l'ellipse rapportée à ses axes. Cas particuliers. — Hyperbole rapportée à ses axes. — Hyperboles conjuguées et hyperbole équilatère. Cas particuliers.

98. Les théories précédentes nous ont fait partager les courbes du second ordre en trois genres, contenant deux classes spéciales :

I. COURBES A CENTRE : — II. COURBE DÉPOURVUE DE CENTRE :

Aussi allons-nous simplifier l'équation générale (φ), en considérant successivement chacune de ces classes.

I. Courbes à centre.

99. La théorie du centre a permis (XIVe leçon) de ramener (φ) à la forme

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + F' = 0 \qquad (\varphi'),$$

pour les cas de $B^2 - AC \lessgtr 0$, avec la condition

$$F' = \frac{(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)}{A(B^2 - AC)}.$$

Ceci posé, essayons de faire disparaître le rectangle des variables et cet essai

est légitimé (§ 56) par l'étude des diamètres conjugués; soit α l'angle formé par l'axe des X positifs nouveaux avec l'ancien et par suite changeons

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} x \cos.\ \alpha - y \sin.\ \alpha, \\ x \sin.\ \alpha + y \cos.\ \alpha, \end{matrix}\right.$$

puisque les anciens axes coordonnés peuvent toujours être supposés rectangulaires. Cette substitution donne pour (φ')

$$\begin{array}{r|c|c|l} \text{A} \cos.^2 \alpha & y^2 + (\text{A}-\text{C}) \sin.\ 2\alpha & xy + \text{A} \sin.^2 \alpha & x^2 + \text{F}' = 0. \\ - \text{B} \sin.\ 2\alpha & + 2\text{B} \cos.\ 2\alpha & + \text{B} \sin.\ 2\alpha & \\ + \text{C} \sin.^2 \alpha & & + \text{C} \cos.^2 \alpha & \end{array}$$

Profitons actuellement de l'indétermination de α pour éliminer le terme en xy : à cet effet, posons

$$(\text{A}-\text{C})\sin.2\alpha + 2\text{B}\cos.2\alpha = 0 \quad \text{d'où} \quad \text{tg}.2\alpha = \frac{-2\text{B}}{\text{A}-\text{C}} \ \ldots\ldots \ (\text{tg}.2\alpha);$$

donc, on aura toujours pour 2α deux séries de valeurs admissibles, car les tangentes peuvent passer par tous les états de grandeur ; une de ces séries correspond à des angles positifs, l'autre à des valeurs négatives pour α, mais on peut ne considérer que les grandeurs positives de α; et quoique ces dernières soient multiples sous le point de vue analytique, il n'y aura qu'UN SEUL système géométrique d'axes coordonnés. En effet, α étant compris entre 0° et 360°, 2α aura pour limites 0° et 2.360°; donc, si nous désignons par $2\alpha'$ la valeur de $2\alpha < 180°$, les seules valeurs de cette indéterminée seront

$$2\alpha', \qquad 2\alpha' + 180°, \qquad 2\alpha' + 2.180° \quad \text{et} \quad 2\alpha' + 3.180°,$$

et, par suite, pour α

$$\alpha', \qquad \alpha' + 90°, \qquad \alpha' + 2.90° \quad \text{et} \quad \alpha' + 3.90°.$$

Mais les divers systèmes d'axes qui correspondent à ces grandeurs de α, n'en forment physiquement qu'un seul : *Le second, le troisième et le dernier ne sont autres que le premier qui aurait tourné autour de l'origine de* UN, *de* DEUX *et de* TROIS *quadrants trigonométriques.*

Ainsi pour *un système unique et géométrique* d'axes rectangulaires, nous obtenons, pour les courbes à centre, rapportées à ce point pour origine,

$$(\text{A}\cos^2\alpha - \text{B}\sin 2\alpha + \text{C}\sin^2\alpha)y^2 + (\text{A}\sin^2\alpha + \text{B}\sin 2\alpha + \text{C}\cos^2\alpha)x^2 + \text{F}' = 0 \quad (1) \text{ ou } (\varphi'');$$

sauf à déterminer les coefficients de y^2 et de x^2, en fonction de A, B et C; puisque α ne dépend que de ces constantes.

Or, en posant

$$\text{M} = \text{A} \cos.^2\alpha - \text{B} \sin.\ 2\alpha + \text{C} \sin.^2\alpha \quad \text{et} \quad \text{N} = \text{A} \sin.^2\alpha + \text{B} \sin.\ 2\alpha + \text{C} \cos.^2\alpha,$$

nous en déduisons d'une part

$$M + N = A + C;$$

et d'autre part, en remplaçant cos. 2α et sin. 2α en fonction de tg. 2α,

$$M - N = \frac{(A-C)-2B\,\text{tg.}\,2\alpha}{\sqrt{1+\text{tg.}^2\,2\alpha}} = \frac{(A-C)^2+4B^2}{\sqrt{(A-C)^2+4B^2}} = \sqrt{(A-C)^2+4B^2};$$

d'où

$$M = \frac{1}{2}(A+C) + \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+4B^2} \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+4B^2};$$

et comme (§ 61)

$$F' = \frac{(BD-AE)^2 - (B^2-AC)(D^2-AF)}{A(B^2-AC)},$$

l'équation (1) est complètement déterminée.

REMARQUE. Le lecteur a déjà saisi que prendre le radical $\sqrt{(A-C)^2+4B^2}$ avec le signe —, reviendrait à changer x en y et réciproquement.

100. Considérons maintenant chacune des deux courbes à centre :

I. $B^2 - AC < 0$.

Dans ce cas, M et N sont *positifs*, puisqu'on a

$$\sqrt{(A-C)^2+4B^2} < A + C,$$

et que F' doit être *négatif* (VII LEÇON), pour qu'il y ait courbe.

Ceci posé, introduisons dans (φ'') les longueurs des demi-axes conjugués : à cet effet, soit a celui situé sur OX et b l'autre appliqué sur l'axe des Y ; on a

$$\left.\begin{array}{l} y = 0, \\ x = 0, \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} Na^2 + F' = 0, \\ Mb^2 + F' = 0; \end{array}\right\} \text{et par suite} \left\{\begin{array}{l} N = \dfrac{-F'}{a^2}, \\ M = \dfrac{-F'}{b^2}. \end{array}\right.$$

Ainsi (φ'') devient

$$\frac{-F'}{b^2}y^2 + \frac{-F'}{a^2}x^2 + F' = 0,$$

ou

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (e)$$

Telle est L'ÉQUATION DE L'ELLIPSE RAPPORTÉE A SES AXES COMME LIGNES DE COORDONNÉES.

REMARQUES I. $(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0$ donnerait

$$My^2 + Nx^2 = 0;$$

c'est-à-dire *un point*, puisqu'on devrait avoir *simultanément*

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Dans ce cas, on dit que l'*ellipse est réduite à son centre*, ce que nous savions.

II. $(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) < 0$, ne permettrait de vérifier (φ) pour aucune solution réelle de x ou de y, donc le *lieu est imaginaire*; résultat indiqué à la VII[e] leçon.

III. Enfin $a = b$ réduirait (c) à la forme

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

c'est-à-dire que l'*ellipse deviendrait un cercle*, puisque les axes sont rectangulaires.

$$\text{II.} \quad B^2 - AC > 0.$$

Or, cette hypothèse implique

$$\sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} > A + C;$$

donc

$$M > 0 \quad \text{et} \quad N < 0.$$

D'un autre côté, l'existence du lieu exige

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) \gtrless 0 :$$

ainsi on pourra avoir

$$F' \gtrless 0.$$

Considérons le premier de ces cas.

Posons

$$y = 0 \quad \text{il vient} \quad Na^2 + F' = 0 \quad \text{d'où} \quad N = \frac{-F'}{a^2};$$

tandis que

$$x = 0,$$

ne donnant pour y que des *valeurs imaginaires*, on a

$$M(b\sqrt{-1})^2 + F' = 0 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{F'}{b^2};$$

et, par suite, (φ'') devient

$$\frac{F'}{b^2}y^2 + \frac{-F'}{a^2}x^2 = -F',$$

ou

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad (h).$$

Telle est l'ÉQUATION DE L'HYPERBOLE RAPPORTÉE A SES AXES, CELUI DES X RENCONTRANT LA COURBE.

REMARQUES I. $F' < 0$ donne

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (h_1)$$

qui ne diffère de (h), abstraction faite des axes de la courbe, que par le changement de x en y et réciproquement. Les courbes (h) et (h_1) *ont les mêmes asymptotes*, et plus tard nous verrons que *les diamètres réels pour l'une sont imaginaires pour l'autre et réciproquement*.

N. B. (h) et (h_1) sont dites HYPERBOLES CONJUGUÉES.

II. Enfin, lorsque

$$a = b,$$

il vient

$$h') \quad y^2 - x^2 = -a^2 \quad \text{ou} \quad y^2 - x^2 = a^2 \quad (h'_1$$

et l'hyperbole est dite *équilatère* : on reconnaît *immédiatement que ses asymptotes sont rectangulaires;* et on démontrera plus loin que *ses diamètres conjugués sont égaux*, ce qui permet de dire que L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE EST PARMI LES HYPERBOLES CE QU'EST LE CERCLE PARMI LES ELLIPSES.

III. $(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0$ réduit (h) à la forme

$$y = \pm \frac{b}{a} x;$$

c'est-à-dire que LA COURBE EST RÉDUITE A SES ASYMPTOTES.

101. Ainsi

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$

sont les équations les plus simples des courbes à centre du second ordre, LES SIGNES SUPÉRIEURS SE RAPPORTANT A L'ELLIPSE; et LE SIGNE INFÉRIEUR DU PREMIER MEMBRE A L'HYPERBOLE, QUEL QUE SOIT LE SIGNE DU SECOND MEMBRE.

---

§ IX.

Suite de la réduction de (φ).

XXIe LEÇON.

—

SOMMAIRE.

Simplification de l'équation de la courbe dépourvue de centre. — Équation la plus simple des trois courbes du second ordre. — Exercices.

II. Courbe dépourvue de centre.

102. Nous avons vu précédemment que l'équation de cette courbe, ne pouvait être privée en même temps des termes du premier degré ; et cela par suite du caractère analytique $B^2 - AC = 0$, indiquant géométriquement que son centre est situé à l'infini.

Aussi devrons-nous considérer l'équation des courbes du second ordre sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi);$$

et chercherons-nous à faire disparaître le terme en xy. A cet effet changeant, comme pour les courbes à centre,

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} x \cos.\,\alpha - y \sin.\,\alpha, \\ x \sin.\,\alpha + y \cos.\,\alpha, \end{matrix}\right.$$

(φ) devient

$$\left.\begin{array}{l}A\cos.^2\alpha\\ -B\sin 2\alpha\\ +C\sin.^2\alpha\end{array}\right| y^2 + \left.\begin{array}{l}(A-C)\sin.2\alpha\\ +2B\cos.2\alpha\\ \end{array}\right| xy + \left.\begin{array}{l}A\sin.^2\alpha\\ +B\sin.2\alpha\\ +C\cos.^2\alpha\end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l}2D\cos.\alpha\\ -2E\sin.\alpha\\ \end{array}\right| y + \left.\begin{array}{l}2D\sin.\alpha\\ +2E\cos.\alpha\\ \end{array}\right| x + F = 0\,;$$

et, de même que pour les lignes $B^2 - AC \lesseqgtr 0$, posons

$$\text{tg. } 2\alpha = \frac{-2B}{A-C} \ldots\quad (\text{tg. } 2\alpha).$$

Cette hypothèse donne aussi quatre systèmes analytiques de coordonnées rectangles; mais, comme pour les courbes à centre, il n'existe réellement qu'un seul système géométrique. De plus, en représentant par M et N les coefficients des carrés des variables, il vient encore

$$M + N = A + C \quad \text{et} \quad M - N = (A - C)\cos.2\alpha - 2B\sin.2\alpha.$$

Or, de la valeur de tg. 2α et de $B^2 - AC = 0$, on déduit

$$\cos.2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg.}^2 2\alpha}} = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2+4B^2}} = \frac{A-C}{A+C},$$

$$\sin.2\alpha = \text{tg. } 2\alpha\cos.2\alpha = \frac{-2B}{\sqrt{(A-C)^2+4B^2}} = \frac{-2B}{A+C};$$

et par suite

$$M - N = \frac{(A-C)^2+4B^2}{A+C} = \frac{(A+C)^2}{A+C} = A + C.$$

Donc

$$M = (A + C) \quad \text{et} \quad N = 0,$$

d'où, pour l'équation transformée,

$$My^2 + 2(D\cos.\alpha - E\sin.\alpha)\,y + 2(D\sin.\alpha + E\cos.\alpha)\,x + F = 0 \qquad (1);$$

c'est-à-dire que pour LA PARABOLE, *la disparition du rectangle des variables fera évanouir, en même temps, le carré de l'une d'entre elles.*

Maintenant pour calculer les coefficients des termes du premier degré de (1), nous avons

$$\left.\begin{array}{l}2\sin.^2\alpha = 1 - \cos.2\alpha = 1 - \dfrac{A-C}{A+C},\\[2ex] 2\sin.^2\alpha = 1 + \cos.2\alpha = 1 + \dfrac{A-C}{A+C},\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}\sin.\alpha = \sqrt{\dfrac{C}{A+C}},\\[2ex] \cos.\alpha = \sqrt{\dfrac{A}{A+C}};\end{array}\right.$$

et par suite

$$D\cos\alpha - E\sin\alpha = \frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}} \quad \text{et} \quad D\sin\alpha + E\cos\alpha = \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}};$$

donc, l'équation (1) peut s'écrire

$$My^2 + 2Ry + 2Sx + F = 0 \qquad (\varphi').$$

Les coefficients M, R et S sont déterminés.

Il est évident maintenant que le terme en y et celui constant F pourront toujours disparaître, puisqu'il suffira de transporter l'origine en un point (a, b) de (φ') et d'exprimer que l'axe des Y est tangent à la courbe; car, en égalant à zéro le terme en y et celui constant de la transformée de (φ'), l'axe des Y serait tangent à la courbe, puisqu'alors l'axe des X devient un axe de symétrie, que ses cordes sont parallèles à Y et que son intersection avec le lieu est l'origine.

Pour effectuer cette transformation, changeons dans (φ')

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} x+a, \\ x+b, \end{matrix}\right.$$

il vient

$$My^2 + 2(Mb+R)y + 2Sx + (Mb^2 + 2Rb + 2Sa + F) = 0;$$

d'où, en posant

$$\left.\begin{matrix} Mb + R = 0, \\ Mb^2 + 2Rb + 2Sa + F = 0, \end{matrix}\right\} \text{ on déduit } \left\{\begin{matrix} b = \dfrac{-R}{M}, \\ a = \dfrac{R^2 - MF}{2SM}; \end{matrix}\right.$$

et par suite la transformée finale

$$y^2 = -\frac{2S}{M}x = 2px \;\ldots\; (P).$$

Ainsi LA FORME (P) EST LA FONCTION ANALYTIQUE LA PLUS SIMPLE POUR CARACTÉRISER LA COURBE $B^2 - AC = 0$.

Équation la plus simple des trois courbes du second ordre.

103. Nous avons obtenu (XX[e] leçon) pour les courbes à centre

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2:$$

si nous transportons l'origine au point $(-a, 0)$ pour l'éllipse, et à celui $(a, 0)$ pour l'hyperbole, il vient

$$a^2y^2 - 2ab^2x \pm b^2x^2 = 0,$$

ou

$$y^2 - 2\frac{b^2}{a}x \pm \frac{b^2}{a^2}x^2 = 0.$$

Or, la corde conjuguée de l'axe des X, pour

$$x = \sqrt{a^2 \mp b^2},$$

suivant que l'on considère *l'ellipse* ou *l'hyperbole*, a pour valeur *numérique* le coefficient de x, en la désignant par $2p$, on aura

$$\frac{b^2}{a} = p \quad \text{et par suite} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} = q;$$

d'où

$$y^2 - 2px \pm qx^2 = 0 \qquad (\psi),$$

pour l'équation finale : le signe *inférieur* appartient à $B^2 - AC > 0$.

Mais admettons, ce que nous vérifierons plus tard, que l'abscisse $\sqrt{a^2 \mp b^2}$ corresponde au foyer de la courbe, la corde $2p$ existe donc, quel que soit a, et comme dans la parabole $(B^2 - AC = 0)$ $a = \infty$; on obtient *numériquement*

$$q = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} = \frac{constante}{\infty} = 0,$$

d'où

$$y^2 = 2px;$$

c'est-à-dire la forme (P) trouvée (§ 102).

Ainsi la forme

$$y^2 - 2px \pm qx^2 = 0$$

comprend, sous l'expression la plus simple, les trois courbes du second ordre.

SCOLIE. La forme (ψ) a été établie pour le cas spécial d'axes coordonnés rectangulaires; or, de simples considérations géométriques permettent de montrer que les coordonnées peuvent aussi être obliques : en effet, prenons un diamètre *réel* pour axe des X et la tangente à une de ses extrémités pour Y, comme cette dernière droite est parallèle aux cordes conjuguées de X, l'équation devra être telle que des valeurs données à x donnent, pour y, des valeurs égales et de signes contraires; donc l'origine étant un point de la courbe, l'équation de cette dernière sera bien de la forme

$$y^2 + 2px + qx^2 = 0,$$

abstraction faite des signes des paramètres.

Exercices.

104. Voici quelques applications sur cette leçon et la précédente.

1° Simplifier $y^2 + 2xy + x^2 - 4y - 3x + 4 = 0$.

2° Ramener l'équation du lieu $y^2 + 2xy + 5x^2 - 4x = 0$ à la forme, la plus simple.

3° Peut-on donner à $y^2 + xy - 2x^2 - 2y - 2x + 3 = 0$, la forme

$$xy = constante?$$

4° Simplifier $y^2 - 2xy + 3x^2 - 2y + 4x - 5 = 0$.

XXIIᵉ, XXIIIᵉ, XXIVᵉ & XXVᵉ LEÇON.

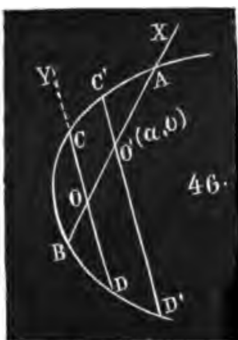
—

SOMMAIRE.

Applications générales sur les courbes du second degré.

108. Les applications développées qui vont suivre, n'ont d'autre but que d'initier plus complètement le lecteur à l'emploi de la méthode de DESCARTES.

THÉORÈME I.



Ayant tiré une sécante par deux points A et B d'une courbe du second ordre, menez une série de cordes parallèles CD, C'D' .... qui coupent la sécante : le rapport du rectangle [CO. OD] des deux segments de chacune des cordes, à celui [AO. BO] des segments correspondants de la sécante, sera constant (fig. 46).

Pour démontrer facilement cette propriété, prenons la sécante AB pour axe des X et une des cordes CD pour axe des Y; alors

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi),$$

sera l'équation de la courbe donnée.

Ceci posé, nous aurons, pour déterminer OA et OB,

$$y = 0, \quad Cx^2 + 2Ex + F = 0,$$

et, pour OC et OD,

$$x = 0, \quad Ay^2 + 2Dy + F = 0,$$

d'où

$$OA.\ OB = F : C;$$

$$OC.\ OD = F : A;$$

d'où

$$OC.\ OD : OA.\ OB :: C : A \ldots\ldots (1).$$

Maintenant si nous considérons une autre corde C'D', nous aurons d'abord, en transportant l'origine en O',

$$Ay^2 + 2By(x + a) + C(x + a)^2 + 2Dy + 2E(x + a) + F = 0;$$

puis, de cette dernière relation, on déduit successivement

$$\left.\begin{array}{l} y=0, \quad C(x+a)^2+2E(x+a)+F=0, \\ \text{et} \\ x=0, Ay^2+2(Ba+D)y+Ca^2+2Ea+F=0, \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} O'A.O'B=(Ca^2+2Ea+F):C; \\ \\ O'C'.O'D'=(Ca^2+2Ea+F):A; \end{array}\right.$$

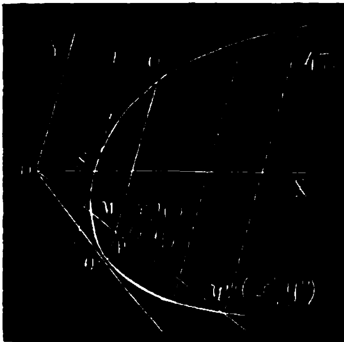
donc

$$O'C' : O'D' :: O'A \,.\, O'B :: C : A, \qquad (2)$$

et, par suite de (1) et (2),

$$OC \,.\, OD : OA \,.\, OB :: O'C' \,.\, O'D' : O'A \,.\, O'B \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II.



D'un point O situé sur le plan d'une courbe du second ordre, on trace une sécante OM'M'' : le lieu du point P harmonique de O par rapport aux deux points M' et M'', est sur la corde de contact des tangentes tracées à la courbe par le point O (fig. 47).

D'abord il est évident que les points de contact Q et Q' des tangentes tracées de O à la courbe, appartiendront au lieu cherché, car on a

$$OQ : OQ :: \textit{zéro} : \textit{zéro} \text{ et } OQ' : OQ' :: \textit{zéro} : \textit{zéro}.$$

Ceci posé, prenons pour axe des X, le diamètre passant par le point O et pour axe des Y, la droite OY parallèle aux cordes conjuguées de OX ; alors la section conique aura pour équation

$$Ay^2 + Cx^2 + 2Ex + F = 0, \quad (\varphi).$$

Maintenant considérons une sécante quelconque

$$y = \alpha x \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (G) ;$$

d'où, pour déterminer les abscisses de ses extrémités [(x', y') et (x'', y'')] situées sur (φ),

$$x^2 + \frac{2E}{A\alpha^2 + C}\,x + \frac{F}{A\alpha^2 + C} = 0;$$

et par suite

$$1) \qquad x'x'' = \frac{F}{A\alpha^2 + C} \qquad \text{et} \qquad x' + x'' = -\frac{2E}{A\alpha^2 + C} \qquad (2.$$

Or, par hypothèse,

$$OM' : OM'' :: PM' : PM'', \quad \text{d'où} \quad x' : x'' :: x - x' : x'' - x,$$

(x désignant l'abscisse du point P); donc

$$(x' + x'')\,x = 2x'x'',$$

et, par suite des relations (1) et (2),

$$x = -\frac{F}{E};$$

c'est-à-dire *la corde des contacts des tangentes tracées par l'origine*. De plus, cette droite

QQ', conjuguée du diamètre OX, est parallèle à la tangente ST, menée à la courbe par l'intersection de cette dernière avec le diamètre OX.

THÉORÈME III.

D'un point donné sur le plan d'une courbe du second ordre, on trace une sécante. On demande de prouver que l'intersection des tangentes à la courbe par les extrémités de cette sécante, est sur une même droite parallèle aux cordes conjuguées du diamètre passant par le point donné.

N. B. Le point de concours des sécantes s'appelle PÔLE et la droite, intersection commune de chaque couple de tangentes, se nomme LA POLAIRE du point donné.

Considérons l'équation générale

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi),$$

et désignons par (X, Y) les coordonnées du *pôle;* et soit

$$y - Y = a(x - X),$$

l'équation d'une des sécantes précitées, pour laquelle

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

[(x', y') et (x'', y'') désignant ses points d'intersection avec (φ)]; donc

$$y' - Y = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x' - X) \ldots\ldots \qquad (1),$$

exprimera que cette sécante passe par l'un des points (x', y').

Ceci posé, les génératrices du lieu cherché, étant les tangentes aux points (x', y') et (x'', y''), seront représentées par

$$Ayy' + B(xy' + yx') + Cxx' + D(y + y') + E(x + x') + F = 0 \ldots\ldots \qquad (G),$$
$$Ayy'' + B(xy'' + yx'') + Cxx'' + D(y + y'') + E(x + x'') + F = 0 \ldots\ldots \qquad (G'),$$

auxquelles il faut ajouter les équations de condition

$$Ay'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F = 0 \ldots\ldots \qquad (2),$$
$$Ay''^2 + 2Bx''y'' + Cx''^2 + 2Dy'' + 2Ex'' + F = 0 \ldots\ldots \qquad (3);$$

et par suite l'élimination des *constantes variables* x', y', x'' et y'' entre (G), (G') (1), (2) et (3), donnera la fonction demandée.

Or, (G) et (G') donnent, par voie de soustraction,

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{By + Cx + E}{Ay + Bx + D};$$

d'où, en substituant dans (1), il vient, toute réduction faite au moyen de (G),

$$AYy + B(Xy + Yx) + CXx + D(Y + y) + E(X + x) + F = 0 \ldots\ldots \qquad (\psi).$$

Ainsi le *lieu cherché est bien une droite.*

De plus, la direction du diamètre passant par le pôle, sera

$$m = \frac{Y - y_1}{X - x_1}$$

[(x_1, y_1) étant le centre]; et, comme la direction de ses cordes est

$$m' = -\frac{Bm + C}{Am + B},$$

on obtient, en remplaçant m, x_1 et y_1 par leurs valeurs,

$$m' = -\frac{BY + CX + E}{AY + BX + D};$$

c'est-à-dire *la direction de* (ψ).

Donc, *la polaire est bien parallèle aux cordes conjuguées du diamètre du pôle.*

Remarques I. Si *le pôle* (X, Y) *est sur* (φ), on reconnaît immédiatement que (ψ) *est tangente à* (φ).

II. Lorsque *le pôle est extérieur à la directrice*, la corde des contacts des tangentes menées du pôle, sera la polaire.

III. Enfin le point (X, Y) *étant intérieur à* (φ), le lieu rectiligne indiqué sera extérieur à la courbe.

Théorème IV.

La corde des contacts des tangentes menées par tout point d'une droite à une section conique, passe par un point constant situé sur le diamètre des cordes parallèles à la droite donnée.

Soit (x', y') un point de la polaire

$$y = ax + b \ldots \quad (P);$$

nous aurons

$$y' = ax' + b \ldots \quad (1).$$

D'un autre côté

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

étant la caractérisation analytique des courbes du second ordre,

$$Ayy' + B(xy' + yx') + Cxx' + D(y + y') + E(x + x') + F = 0 \quad (2),$$

sera la corde des contacts des tangentes tracées du point (x', y').

Or, la direction a de la polaire, donne, pour le diamètre des cordes qui lui sont parallèles,

$$(Aa + B)y + (Ba + C)x + Da + E = 0 \quad (3);$$

d'où, en éliminant y entre (2) et (3), il vient, pour l'abscisse de leur intersection,

$$x = \frac{-(BD - AE)(y' - ax') + (D^2 - AF)a + (DE - BF)}{(B^2 - AC)(y' - ax') - (BD - AE)a + (BE - CD)};$$

et par suite, à cause de (1),

$$x = -\frac{(BD - AE)b - (D^2 - AF)a - (DE - BF)}{(B^2 - AC)b - (BD - AE)a + (BE - CD)}.$$

Cette abscisse étant indépendante de (x', y'), *il en sera* (3) *de même pour l'ordonnée*. C.Q.F.D.

Théorème V.

Un point (α, β) sera extérieur ou intérieur à une courbe du second ordre, suivant que l'on aura

$$A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F \gtrless 0.$$

En effet, du point (α, β) menons une tangente à la courbe

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi),$$

nous aurons

$$y - \beta = m(x - \alpha) \quad \text{ou} \quad y = mx + (\beta - m\alpha) \qquad (1);$$

sauf à déterminer m de telle sorte que (1) coupe (φ) en deux points confondus en un seul.

Mais, en éliminant y entre (1) et (φ), on obtient

$$\left.\begin{array}{r} [(B^2-AC)\,\alpha^2 + 2(BD-AE)\,\alpha + (D^2-AF)]\,m^2 \\ -\,2\,[(B^2-AC)\,\alpha\beta + (BD-AE)\,\beta + (BE-CD)\,\alpha + (BF-DE)]\,m \\ +\,[(B^2-AC)\,\beta^2 + 2\,(BE-CD)\,\beta + (E^2-CF)] \end{array}\right\} = 0 \quad (2).$$

Or, (2) devra donner *deux* ou *zéro* valeurs réelles pour m, suivant que (α, β) sera *extérieur* ou *intérieur* à (φ); c'est-à-dire, qu'en appelant T l'expression

$$\frac{(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)}{A},$$

il faudra avoir

$$T.\,A\beta^2 + T.\,2B\alpha\beta + T.\,C\alpha^2 + T.\,2D\beta + T.\,2E\alpha + T.\,F \gtrless 0 \quad (3).$$

Considérons maintenant successivement chacun des trois genres de courbe du second ordre :

I. $B^2 - AC < 0$. Ici l'existence du lieu implique, puisqu'on peut supposer $A > 0$,

$$T > 0;$$

donc (3) peut se simplifier et s'écrire

$$A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F \gtrless 0. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

II. $B^2 - AC = 0$. Dans ce cas, on doit avoir $BD - AE \gtrless 0$; donc aussi

$$T > 0;$$

et par suite encore

$$A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F \gtrless 0. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

III. $B^2 - AC > 0$. Ce genre exige l'examen de deux cas distincts :

1° Le diamètre

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \qquad (d)$$

rencontre (φ), alors

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) > 0, \quad \text{d'où} \quad T > 0;$$

et (3) se réduit de nouveau à

$$A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F \gtrless 0.$$

2° Le diamètre (d) est *imaginaire*, et on a

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) < 0.$$

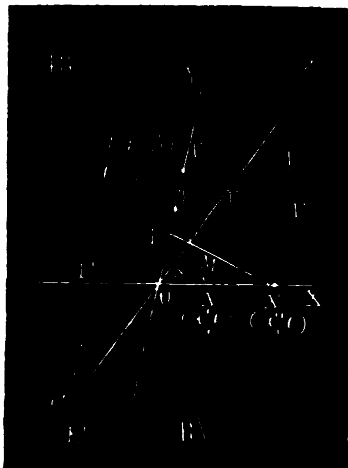
Or, la condition précédente ne variant pas en changeant les signes des deux membres de (φ), et comme alors on a $A < 0$, on obtient de nouveau

$$T > 0;$$

et, par suite, (3) donne encore

$$A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F \gtrless 0. \qquad \text{C,Q.F.D.}$$

THÉORÈME VI.



Si d'un point C (α, β) pris sur le plan d'un angle YOX, on trace une série de transversales CBA, CB'A',..... les diagonales de chaque quadrilatère formé par deux transversales et les droites OX et OY se coupent en des points H, H'..... en ligne droite avec le sommet O de l'angle YOX (fig. 48).

D'abord la transversale CO donne le point O pour un de ceux du lieu demandé, ensuite une sécante CB'A', rencontrant OX et OY, combinée avec CEI parallèle à OX, donne le point F par l'intersection de A'E avec B'I' parallèle à OX.

Il est encore à remarquer que le point O résulte aussi du couple de sécantes CI et CK' tracées parallèlement à OX et à OY.

Ceci posé, prenons OX et OY comme axes coordonnés et désignons par x' et x'' les abscisses à l'origine de deux sécantes quelconques CBA et CB'A'; nous aurons, pour les équations de ces droites,

$$y = \frac{\beta}{\alpha - x'}(x - x') \quad \text{et} \quad y = \frac{\beta}{\alpha - x''}(x - x'');$$

d'où, pour les ordonnées à l'origine de ces sécantes,

$$OB = \frac{-\beta x'}{\alpha - x'} \quad \text{et} \quad OB' = \frac{-\beta x''}{\alpha - x''};$$

et par suite, les équations des génératrices AB' et A'B seront

$$AB') \qquad \frac{x}{x'} + \frac{y(\alpha - x'')}{-\beta x''} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{x''} + \frac{y(\alpha - x')}{-\beta x'} = 1 \qquad (A'B.$$

Il est évident maintenant que si la contexture des équations (AB') et (A'B) permet d'éliminer en même temps *(ce que la génération du lieu indique)* x' et x'', le résultat sera l'équation du lieu demandé.

Or, ces équations peuvent s'écrire

$$-\beta x x'' + x'(\alpha - x'')y = -\beta x'x'' \quad \text{et} \quad \beta x x' - x''(\alpha - x')y = \beta x'x'';$$

d'où, en les combinant par voie d'addition et omettant le facteur commun $x' - x''$,

$$\beta x + \alpha y = 0 \ldots. \qquad (\varphi). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

CONSTRUCTION. En posant $x = \alpha$, on a $y = -\beta$; donc, en prolongeant CE' parallèle

à OY, au-dessous de OX, de $E'C' = EC$; on obtiendra un second point C' de cette droite (φ) qui sera ainsi C'O.

REMARQUE. Le point C se nomme souvent le PÔLE de C'O, dite POLAIRE de C, *par rapport à l'angle* YOX.

COROLLAIRE. L'équation (φ) ne dépendant que du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, qui n'est autre que la direction de la droite CO; (φ) ne variera pas pour tous les points de COR qui, pour cette raison, est appelée LA POLAIRE de *la droite* ZOC' *par rapport à l'angle* YOX.

En effet, soit (x', y') un point de (φ), sa polaire sera

$$y'x + x'y = 0 \qquad (\varphi');$$

d'un autre côté la situation de ce point (x', y') sur (φ), donne

$$\beta x' + \alpha y' = 0;$$

d'où, en éliminant le rapport $\frac{y'}{x'}$,

$$\alpha y - \beta x = 0;$$

c'est-à-dire *la droite* COR.

SCOLIE. Les quatre droites OX, OY, OZ et OR forment ce qu'on appelle UN FAISCEAU HARMONIQUE, parce qu'une sécante quelconque CBA menée par un point de l'une d'elles, se trouve divisée par les autres en *proportion harmonique*; c'est-à-dire qu'on a

$$AS : BS :: AC : BC.$$

En effet, en désignant par X l'abscisse du point S, on peut remplacer la proportion précédente par

$$x' - X : X :: x' - \alpha : -\alpha;$$

c'est-à-dire qu'il faut vérifier que pour une sécante quelconque CBA, on a

$$X = \frac{\alpha x'}{2\alpha - x'}?$$

Or, en appelant m la direction de cette sécante CBA, on a

$$x' = \alpha - \frac{\beta}{m},$$

d'où

$$X = \frac{\alpha(\alpha m - \beta)}{\alpha m + \beta};$$

et comme on obtient la même valeur pour l'abscisse du point d'intersection de (φ) avec la sécante

$$y - \beta = m(x - \alpha),$$

le théorème est démontré.

THÉORÈME VII.

Par un point O situé sur le plan d'une courbe du second ordre, on trace des sécantes OA'A'', OB'B'',.... le lieu des points M'', M''', d'intersection des diagonales A'B'' et A''B', A'D'' et A''D', est une droite TT' conjuguée du diamètre passant par O et polaire de ce point (fig. 49).

Prenons pour axe des X le diamètre passant par O et pour axe des ordonnées, OY parallèle aux cordes conjuguées de ce diamètre; c'est-à-dire parallèle à la corde de contact des tangentes menées du point O.

Ceci posé, l'équation de la courbe sera

$$Ay^2 + Cx^2 + 2Ex + F = 0 \quad (\varphi);$$

et en considérant la sécante diamétrale OA″X, les abscisses α' et α'' des extrémités seront données par

$$Cx^2 + 2Ex + F = 0,$$

donnant

$$\alpha' + \alpha'' = -2\frac{E}{C}, \quad \alpha'\alpha'' = -\frac{F}{C} \quad \text{et} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \alpha''\end{matrix}\right\} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - CF}}{C}.$$

D'un autre côté, la transversale OB′B″ étant

$$y = mx,$$

on obtient, pour les abscisses des points extrêmes B′ et B″,

$$\left.\begin{matrix}x'\\ x''\end{matrix}\right\} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - F(Am^2 + C)}}{Am^2 + B};$$

et pour les ordonnées

$$y' = mx' \quad \text{et} \quad y'' = mx''.$$

Ceci posé, nous avons, pour les génératrices A′B″ et A″B′,

$$y = \frac{y''}{x'' - \alpha'}(x - \alpha') \quad \text{et} \quad y = \frac{y'}{x' - \alpha''}(x - \alpha''),$$

ou

$$y = \frac{mx''}{x'' - \alpha'}(x - \alpha') \quad \text{et} \quad y = \frac{mx'}{x' - \alpha''}(x - \alpha'');$$

d'où, pour l'abscisse du point M″.

$$(\alpha'x' - \alpha''x'')\,x = x'x''(\alpha' - \alpha'') + \alpha'\alpha''(x' - x''),$$

et, en remplaçant α', α'', x' et x'' par leurs valeurs, on obtient, toute réduction faite,

$$x = -\frac{F}{E};$$

c'est-à-dire *la polaire du point* O. C. Q. F. D.

REMARQUE. Trois transversales OB″, OA″ et OD″ déterminent deux points M″ et M‴ de la droite TT′ dont les intersections, avec la courbe, donnent les points de contact des tangentes menées du point O.

THÉORÈME VIII.

Si trois courbes du second ordre ont une corde commune, les autres cordes communes à ces courbes, prises deux à deux, se coupent en un même point (fig. 50).

Ce théorème nous servira pour établir l'*hexagramme mystique de* PASCAL, lequel permet de décrire en n'employant que la règle, *une courbe du second ordre, assujettie à passer par cinq points donnés.*

Prenons la corde commune $OA = d$ pour axe des X, l'origine à une de ses extrémités O et l'angle des axes étant quelconque; nous aurons, pour l'une de ces courbes,

$$Ay^2 + 2Bxy + 2Dy + x^2 - dx = 0 \qquad (\varphi),$$

car $y = 0$ donne

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = d.$$

De plus, nous aurons, pour chacune des autres lignes précitées,

$$A'y^2 + 2B'xy + 2D'y + x^2 - dx = 0 \qquad (\varphi'),$$
$$A''y^2 + 2B''xy + 2D''y + x^2 - dx = 0 \qquad (\varphi'').$$

Or, ces équations (φ), (φ') et (φ''), combinées deux à deux par voie de soustraction, donnent

$$(\varphi) - (\varphi') \ldots\ldots [(A - A')\,y + 2\,(B - B')\,x + 2\,(D - D')]\,y = 0 \ldots\ldots \qquad (1),$$
$$(\varphi) - (\varphi'') \ldots\ldots [(A - A'')\,y + 2\,(B - B'')\,x + 2\,(D - D'')]\,y = 0 \ldots\ldots \qquad (2),$$
$$(\varphi') - (\varphi'') \ldots\ldots [(A' - A'')\,y + 2\,(B' - B'')\,x + 2\,(D' - D'')]\,y = 0 \ldots\ldots \qquad (3).$$

Ainsi, à part la corde commune

$$y = 0,$$

c'est-à-dire l'axe des X; les autres cordes seront données par

$$(A - A')\,y + 2\,(B - B')\,x + 2\,(D - D') = 0 \ldots\ldots (c) \quad \text{ou} \quad (CD),$$
$$(A - A'')\,y + 2\,(B - B'')\,x + 2\,(D - D'') = 0 \ldots\ldots (c') \quad \text{ou} \quad (KP);$$
$$(A' - A'')\,y + 2\,(B' - B'')\,x + 2\,(D' - D'') = 0 \ldots\ldots (c'') \quad \text{ou} \quad (IG);$$

et comme (c''), par exemple, n'est autre que

$$(c') - (c) = 0,$$

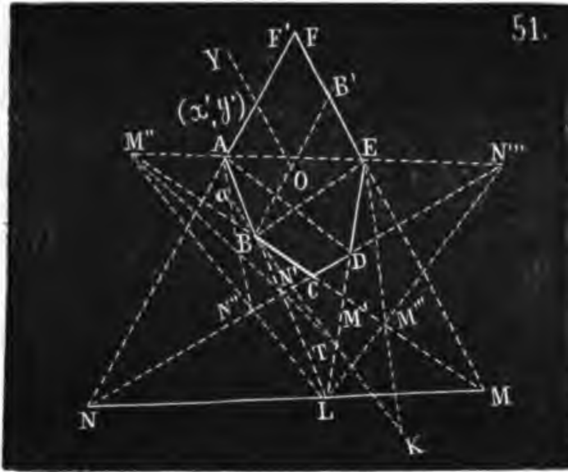
il s'ensuit *que les droites* (c), (c') *et* (c'') *se coupent bien en un même point.* C. Q. F. D.

SCOLIE. Ce théorème serait encore vrai si une ou plusieurs équations (φ), (φ') et (φ'') représentaient le système de deux droites. Il le serait lors même que (φ), (φ') et (φ'') n'auraient pour *points communs deux à deux* que les seules extrémités de la corde commune d; c'est-à-dire que les cordes (c), (c') et (c'') concourreraient toujours.

THÉORÈME IX.

Dans tout hexagone inscrit à une courbe du second ordre, les points d'intersection des côtés opposés sont en ligne droite (fig. 51).

Soit ABCDEF un hexagone inscrit à une courbe du second ordre; L, M et N les



points de concours des côtés opposés : *ces points sont en ligne droite.*

En effet, joignons A et D; cette corde est commune à (φ) et aux systèmes des droites AB et CD, AF et DE; or, l'intersection de (φ) avec le premier système est BC et avec le second EF; d'où, le point M.

D'un autre côté, la seconde corde du lieu [(AB et CD)] et de celui [(AF et DE)] est la corde NL : donc, (Théorème VIII) N, L et M sont en ligne droite. C. Q. F. D.

Corollaire. Soit à *décrire la courbe du second ordre devant passer par les points* A, B, C, D *et* E : après avoir joint le sommet A à celui B, B à C et ainsi de suite jusqu'en E, on obtient un pentagone ouvert ABCDE, dont les côtés extrêmes, AB et DE prolongés, déterminent un certain point L par lequel nous traçons une droite quelconque NLM terminée aux prolongements M et N des deux côtés BC et CD. Les droites ME et NA donneront, par leur concours en F, *un point du lieu demandé;* car, s'il n'en était pas ainsi, soit F' le *second point* d'intersection de (φ) avec la corde NA, les points F', E et M seraient en ligne droite, ce qui est absurde. Donc, si on fait pivoter la sécante NLM autour du point L, les droites NA et ME tourneront autour des points variables N pour la première et M pour la seconde, et *seront deux génératrices du lieu demandé* qui sera décrit par les diverses positions du point F *(Le lecteur fera bien de chercher l'équation du lieu du point* F, *en prenant* LBA *et* LDE *comme axes coordonnés).*

Déduisons maintenant de la génération précédente du point F, que la courbe doit passer par les points A, B, C, D et E. En effet, le point B lui appartient : car si NLM coïncide avec AB, N situé sur CD viendra en N', et M sur BC se fixe en B; ainsi NA devenue LN'A et ME, transformée en BE, donnent bien le point B. De même, NLM couchée sur DE, transporte N en D et M en M'; alors les génératrices NA et ME occupent les positions AD et M'E déterminant le point D.

Maintenant si la directrice variable NLM passait par C, les points N et M se confondraient avec ce dernier et les génératrices NA et ME en devenant AC et CE fixeraient le point C.

Enfin, supposant que ME soit juxta-posée sur AE, M sera en M'' et NLM sera M''L, alors N vient en N'' et la génératrice NA, devenue N''A, coupera ME, devenue EA, au point A. De plus, NA, en se changeant en N''A, indique que F et A se sont supperposés; donc N''A est tangente à la courbe en A. On obtiendrait de même le point E et la tangente M'''E en ce point E.

Si on veut tracer la tangente de tout autre point, en B par exemple, on prendrait le point N' de concours des côtés opposés AB et CD pour pivot de rotation de la directrice mobile, et on répèterait les constructions précédentes : Ainsi on prolongerait BC jusqu'à son intersection M'' avec AE, on joindrait M''N' et le point T où cette droite couperait DE serait un point de la tangente en B, qui serait alors BT; car N'BA en devenant TB réunit A avec B.

De même, en joignant M' (*intersection de* BC *et* DE) avec N''' (*point de concours de* AE *et* CD), le point où cette droite rencontrerait AB, déterminerait la tangente en D.

Caractérisons maintenant le genre de courbe et les éléments de cette dernière : le point K de concours des tangentes BT et $M'''E$, appartient au diamètre de la corde BE des contacts. De même, les tangentes $N''A$ et TB déterminent un second diamètre; et par suite *le centre* O. Le *parallélisme* des deux diamètres précédents indiquerait que le lieu serait *une parabole.*

Dans le cas *d'une courbe à centre,* traçons BO et soit B' le symétrique de B par rapport à O; BB' sera un diamètre *en grandeur et en position,* son conjugué aura pour *direction* OY *parallèle à la tangente* TB : de plus, en désignant par $2a'$ et $2b'$ la longueur de ces diamètres (b' *est inconnu*) et prenant ces droites pour axes coordonnés; nous aurons

$$a'^2y^2 \pm b'^2x^2 = \pm a'^2b'^2$$

pour l'équation des deux courbes à centre, sauf à déterminer celle qui convient au lieu décrit.

Or, en appelant (x', y') les coordonnées du point A, la tangente AN'' tracée, a pour expression analytique

$$a'^2yy' \pm b'^2xx' = \pm a'^2b'^2,$$

et comme $x = 0$ donne

$$yy' = \pm b'^2;$$

on reconnaît que la courbe sera *elliptique* ou *hyperbolique* suivant que *l'ordonnée à l'origine de cette tangente et l'y du point de contact seront de même signe* ou *de signes contraires :* de plus, b' s'obtient par une moyenne proportionnelle entre ces ordonnées.

Lorsque la courbe est une parabole, le *foyer unique,* s'obtient par une construction très-simple et qui sera démontrée lors de l'étude spéciale des propriétés de ce lieu.

Ce théorème, *dit de* PASCAL, a évidemment lieu pour toutes les formes de l'hexagone, mêmes concaves, et pour tous les lieux du second ordre. Donc, *dans tout hexagone inscrit dans le système de deux droites, situées sur un plan, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.*

PROBLÈME I.

Quelle est la courbe du second degré passant par les points (3, 0), (4, 0), (0, 1), (0, 2) et (1, 4) ?

L'équation générale de ce lieu sera

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (1),$$

sauf à déterminer les constantes A, B,.....

Or, les deux premiers points étant situés sur l'axe des X, de

$$y = 0 \quad \text{avec} \quad Cx^2 + 2Ex + F = 0,$$

on déduit

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2E}{C} &= 3 + 4, \\ \frac{F}{C} &= 3 \;.\; 4; \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} 2E &= -7C \qquad (2E), \\ F &= \;\; 12C \qquad (F). \end{aligned}\right.$$

De même, le troisième et le quatrième point se trouvant sur Y, on a

$$x = 0 \quad \text{avec} \quad Ay^2 + 2Dy + F = 0,$$

et par suite

$$\left.\begin{aligned} \frac{F}{A} &= 1 \;.\; 2, \\ -\frac{2D}{A} &= 1 + 2; \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} A &= \frac{F}{1.2} = 6C \qquad (A), \\ 2D &= -3A = -18C \qquad (2D). \end{aligned}\right.$$

Enfin, la courbe passant par le point (1, 4), on obtient

$$16A + 8B + C + 8D + 2E + F = 0,$$

et, en remplaçant A, D, E et F en fonction de C,

$$2B = -\frac{15}{2}C \ldots\ldots \qquad (2B).$$

Donc (1), se transformant, après la disparition des dénominateurs, en

$$12y^2 - 15xy + 2x^2 - 36y - 14x + 24 = 0 \qquad (\alpha),$$

appartient au genre hyperbolique, puisqu'ici $B^2 - AC > 0$; mais il y a lieu de rechercher si il ne se réduit pas à ses asymptotes : or, on a

$$y = \frac{5}{8}x + \frac{3}{2} \pm \frac{1}{24}\sqrt{129x^2 + 1752x + 2348},$$

et de ce que le trinôme sous le radical n'est point carré parfait, la courbe existe et ses asymptotes sont

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{3}{2} \pm \frac{1}{24}\left\{ x\sqrt{129} + \frac{876}{\sqrt{129}} \right\}.$$

De plus, les racines de

$$129x^2 + 1752x + 2348 = 0$$

étant réelles et inégales, le diamètre

$$y = \frac{5}{8}x + \frac{3}{2}$$

rencontre la courbe et sa construction ainsi que ses intersections avec (φ), détermineront, conjointement avec les asymptotes, le tracé du lieu.

PROBLÈME II.

Tracer la courbe du second ordre tangente au point (2, 0) de l'axe des X, à la droite $y = -2x + 1$ et admettant 2 et 3 pour ordonnées à l'origine.

Nous avons pour la ligne demandée

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (1),$$

et pour les abscisses à l'origine

$$Cx^2 + 2Ex + F = 0,$$

d'où, par suite de leurs valeurs égales à 2,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2E}{C} &= 2 + 2, \\ \frac{F}{C} &= 2. \;\; 2; \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} 2E &= -4C\ldots\ldots \qquad (2E), \\ F &= \;\; 4C\ldots\ldots \qquad (F). \end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, les ordonnées 2 et 3 à l'origine étant données par

$$Ay^2 + 2Dy + F = 0,$$

on en déduit

$$\left.\begin{aligned} \frac{F}{A} &= 2.\ 3, \\ -\frac{2D}{A} &= 2+3; \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} A &= \frac{F}{6} = \frac{2}{3}C\ldots.. \quad (A), \\ 2D &= -5A = -\frac{10}{3}C \quad (2D). \end{aligned}\right.$$

Enfin, le lieu demandé devant être tangent à la droite $y = -2x + 1$, l'équation

$$A(-2x+1)^2 + 2Bx(-2x+1) + Cx^2 + 2D(-2x+1) + 2Ex + F = 0,$$

ou

$$(4A - 4B + C)x^2 - 2(2A - B + 2D - E)x + (A + 2D + F) = 0,$$

devra donner des racines égales ; donc

$$(2A - B + 2D - E)^2 - (4A - 4B + C)(A + 2D + F) = 0;$$

ou, à cause des coefficients déterminés en fonction de C,

$$B^2 + \frac{16}{3}BC - \frac{44}{9}C^2 = 0$$

donnant

$$B = \frac{-8 \pm 6\sqrt{3}}{3}C;$$

donc, (1) devient

$$2y^2 + (-16 \pm 12\sqrt{3})xy + 3x^2 - 10y - 12x + 12 = 0 \qquad (\varphi).$$

Le lecteur déterminera facilement que le signe inférieur donne le genre *hyperbolique* et l'autre celui *elliptique*.

PROBLÈME III.

Les coordonnées formant l'angle θ, déterminer l'hyperbole équilatère passant par les points (a, o), (a', o), $(o, b$ et (o, b').

La courbe

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi)$$

exige, pour première équation de condition (§ 38),

$$A + C - 2B\cos.\theta = 0 \qquad (1);$$

ensuite les abscisses des deux premiers points étant données par

$$y = 0 \quad \text{et} \quad Cx^2 + 2Ex + F = 0,$$

nous en déduisons

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2E}{C} &= (a + a'), \\ \frac{F}{C} &= a\,a'; \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} 2E &= -(a + a').C\ldots.. \quad (2E), \\ F &= a\,a'.C\ldots.. \quad (F). \end{aligned}\right.$$

De même, nous avons, pour les ordonnées des deux derniers points,

$$x = 0 \quad \text{et} \quad Ay^2 + 2Dy + F = 0;$$

et par suite

$$\left.\begin{aligned} \frac{F}{A} &= bb', \\ -\frac{2D}{A} &= (b+b'); \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} A &= \frac{F}{bb'} = \frac{aa'}{bb'}C \ldots\ldots \quad (A), \\ 2D &= -(b+b')A = -\frac{(b+b')aa'}{bb'}C \quad (2D). \end{aligned}\right.$$

Enfin, en substituant les valeurs de 2E, F, A et 2D dans (1), on obtient

$$2B = \frac{aa' + bb'}{bb' \cos.\theta}.C;$$

d'où, pour (φ),

$$aa'y^2 + \frac{aa'+bb'}{\cos.\theta}.xy + bb'x^2 - aa'(b+b')y - bb'(a+a')x + aa'bb' = 0 \qquad (\varphi).$$

REMARQUE. Si $\theta = 90°$, la relation (1) donne

$$A = -C \quad \text{d'où} \quad aa' = -bb',$$

et (φ) serait alors

$$y^2 - \frac{2B}{C}xy - x^2 - (b+b')y + (a+a')y - aa' = 0;$$

c'est-à-dire que le coefficient de xy resterait indéterminé.

N. B. En remplaçant (1) par $B^2 - AC = 0$, on déterminerait la parabole passant par les quatre points donnés.

PROBLÈME IV.

Construire graphiquement les intersections de deux courbes concentriques du second ordre, dont une seule est tracée.

Nous pouvons toujours supposer les deux courbes rapportées à leur centre commun, et par suite

$$\varphi) \qquad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad A'y^2 + 2B'xy + C'x^2 + 1 = b \qquad (\psi$$

seront leurs équations, en supposant toutefois qu'on ait réduit à l'*unité* le terme indépendant des variables.

Or, le lieu (φ) — (ψ) ou

$$(A - A')y^2 + 2(B - B')xy + (C - C')x^2 = 0,$$

passera évidemment par les points demandés; donc, les droites

$$y = \left\{ \frac{-(B-B') \pm \sqrt{(B-B')^2 - (A-A')(C-C')}}{A-A'} \right\} x,$$

convergentes vers le centre commun des courbes, par leur rencontre, avec le lieu construit, donneront les points cherchés.

PROBLÈME V.

Étant données les droites DM, DX et un point A situé sur l'une d'elles; chercher le lieu du point M, tel que MA soit égal à la sécante MMP perpendiculaire à DX (fig. 39).

Comme il s'agit de distances, nous prendrons les axes rectangulaires, l'origine en A et DX comme axe des abscisses.

Ceci posé, en désignant par p la distance AD et par a la tangente trigonométrique de l'angle NDX; nous aurons, pour la droite DN,

$$y = a\,(x + p).\;.\;.\;.\;.\qquad (\text{NP}).$$

D'un autre côté, (x, y) étant les coordonnées d'un point quelconque du lieu, on a

$$\text{AM}^2 = x^2 + y^2;$$

et, par suite de AM = NP,

$$x^2 + y^2 = a^2\,(x + p)^2,$$

ou

$$y^2 + (1 - a^2)\,x^2 - 2a^2px - a^2p^2 = 0 \qquad (\varphi).$$

Discussion. Nous observons tout d'abord que l'intersection I de DN avec l'axe des Y, est un point de la courbe; car, pour cette intersection, l'ordonnée et la sécante se confondent; de plus, comme, en éliminant y entre (NP) et (φ), on obtient

$$x^2 = 0:$$

le lieu est tangent en I à DN. Enfin, on obtiendrait le point de section de (φ) avec DX, en traçant AH bissectrice de DAY et abaissant HS perpendiculaire à DX; car alors HS = SA.

Ceci posé, comme le genre de (φ) dépend du binôme $1 - a^2$, nous devons considérer les trois cas suivants :

I. $135^\circ <$ NDX $< 45^\circ$; c'est-à-dire $a^2 < 1$ et $1 - a^2 = k^2$: d'où

$$y^2 + k^2x^2 - 2a^2px - a^2p^2 = 0 \qquad (e).$$

Ainsi (φ) sera *une ellipse*, se réduisant à son centre pour $a = 0$.

II. NDX $= 45^\circ = 135^\circ$; ici $a^2 = 1$: d'où $1 - a^2 = 0$ et (φ) se transforme en

$$y^2 - 2px - p^2 = 0.\;.\;.\;.\;.\qquad (\text{P});$$

ou *une parabole* coupant AD en son milieu.

III. $135^\circ >$ NDX $> 45^\circ$; alors $a^2 > 1$ donne $1 - a^2 = -k^2$; et on a

$$y^2 - k^2x^2 - 2a^2px - a^2p^2 = 0.\;.\;.\;.\;.\qquad (h);$$

c'est-à-dire *une hyperbole* qui devient *équilatère* pour

$$\text{tg. NDX} = \sqrt{2}.$$

En résumé, ce problème donne un même mode de génération aux trois courbes du second degré, et la forme générale de (φ) indiquait évidemment que la droite DX était un *axe de symétrie*.

PROBLÈME VI.

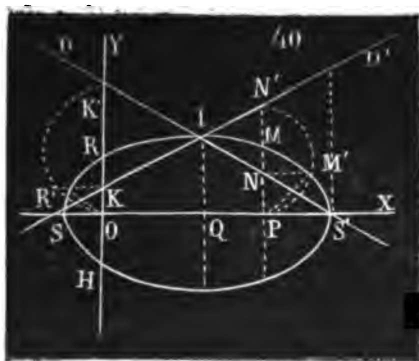
Quelle est la courbe dont chaque ordonnée est moyenne proportionnelle entre celles de deux droites données (fig. 40)?

Soient

$$\text{D)}\qquad y = ax + b \quad \text{et} \quad y = a'x + b' \qquad (\text{D}'$$

les droites données.

D'abord, il est évident que le lieu sera symétrique par rapport à l'axe des X, puis-



que l'ordonnée admet le double signe $\pm$; de plus, les points S' et S où les droites (D) et (D') coupent l'axe des X seront évidemment des points du lieu, car à ces points l'y d'une des droites est nulle. Enfin, le point M du lieu et ayant OP pour abcisse, aura pour ordonnée une moyenne proportionnelle entre PN et PN'.

Ceci posé, nous avons spontanément pour l'équation de la courbe

$$ax + b : y :: y : a'x + b',$$

d'où

$$y^2 - aa'x^2 - (ab' + ba')\,x - bb' = 0 \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire *une courbe du second degré*, dont on aurait facilement les points d'intersection avec les axes coordonnés : on retrouverait ainsi les points S, S' déjà indiqués; toutefois les points R et H n'existeront qu'autant que b et b' seront de même signe.

DISCUSSION. I. a et a' de signes contraires : alors $aa' = -k^2$ et (φ) devient

$$y^2 + k^2x^2 - (ab' + ba')\,x - bb' = 0 \qquad (e);$$

c'est-à-dire *une ellipse.*

N. B. Si les axes sont rectangulaires et que (D) et (D') se coupent à angles droits, on a $aa' = -1$ et

$$y^2 + x^2 - (ab' + ba')\,x - bb' = 0,$$

ou

$$y^2 + \left(x - \frac{ab' + ba'}{2}\right)^2 = \frac{(ab' + ba')^2 + 4bb'}{4};$$

c'est-à-dire une circonférence, ayant pour coordonnées du centre,

$$\left[\frac{ab' + ba'}{2},\ 0\right],$$

et pour rayon

$$\frac{1}{2}\sqrt{(ab' + ba')^2 + 4bb'}.$$

II. $aa' = 0$: ainsi une des droites parallèle à l'axe des X, ou toutes deux; alors il vient, dans le premier cas,

$$y^2 - ba'\left(x + \frac{b'}{a'}\right) = 0 \qquad (P);$$

et dans le second

$$y^2 = bb', \qquad (D_1, D'_1)$$

c'est-à-dire *une parabole* ou *deux parallèles réelles* ou *imaginaires*, suivant que b et b' sont de même signe ou de signes contraires.

III. a et a' de même signe : donc $aa' = k^2$, d'où

$$y^2 - k^2x^2 - (ab' + ba')\,x - bb' = 0 \qquad (h).$$

Ce dernier cas donne *une hyperbole*, laquelle devient *équilatère*, lorsque (D) et (D') forment avec OX des angles complémentaires.

N. B. Les asymptotes de (*h*) sont

$$y = \pm \left\{ x\sqrt{aa'} + \frac{ab' + ba'}{2\sqrt{aa'}} \right\};$$

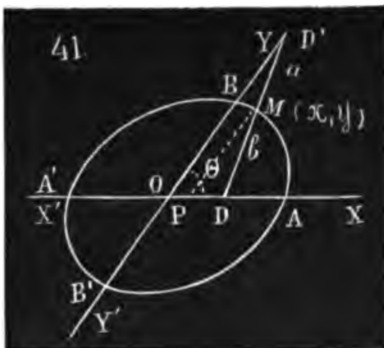
ou le lieu demandé, si on avait

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'};$$

et cette dernière hypothèse, pour le cas de $aa' = -k^2$, réduirait l'ellipse à son centre.

Problème VII.

Quel est le lieu décrit par un point d'une droite de longueur constante et dont les extrémités glissent sur deux droites formant un angle donné (fig. 41)?



Soient OX, OY les droites données formant l'angle θ et DD' une position spéciale de la génératrice : M, étant le point donné de DD', sera un point du lieu, et posons $D'M = a$, $DM = b$.

Ceci posé, lorsque D'D sera couchée sur OX, M sera en A, distant de O de $OA = a$; à mesure que D se rapprochera de O, D' s'éloignera de O sur OY et lorsque la génératrice coïncidera avec OY, M arrivera en B; et la portion AMB sera décrite. De même D parcourant OX', après l'arrivée de D' en O, la partie BA' sera tracée; puis faisant suivre OY' à D', on aura l'arc A'B', lorsque l'extrémité D sera revenue en O; enfin D suivant OX, D' redescendera suivant OY', et sa station en O complètera la description de la partie B'A du lieu demandé. Ce dernier se présente évidemment sous une forme fermée et doué de symétrie par rapport au point O, qui est alors son *centre*.

Maintenant désignons par (x, y) les coordonnées d'un point M quelconque du lieu; nous aurons, en considérant le triangle MPD,

$$y^2 + PD^2 - 2y.\ PD \cos.\ \theta = b^2.$$

Or, les triangles semblables MPD et DOD' donnent

$$D'M \text{ ou } a : OP \text{ ou } x :: MD \text{ ou } b : PD = \frac{bx}{a};$$

d'où

$$y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - 2\frac{b}{a}xy \cos.\ \theta = b^2,$$

et par suite

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy \cos.\ \theta = a^2b^2 \qquad (\varphi).$$

Ainsi le lieu est *une ellipse* dont le centre a pour équations

$$ay - bx \cos.\ \theta = 0 \quad \text{et} \quad bx - ay \cos.\ \theta = 0;$$

c'est-à-dire l'origine O des coordonnées.

N. B. En supposant $\theta = 90°$, il vient

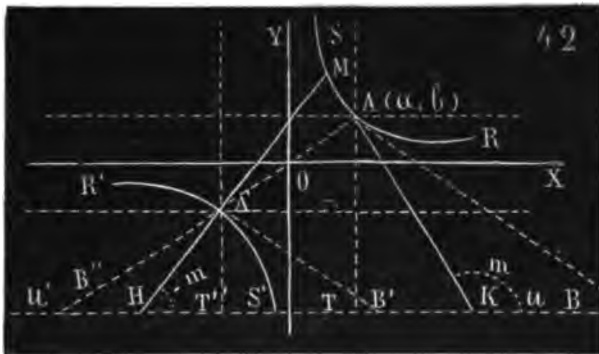
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

ou *une ellipse rapportée à ses axes de symétrie*, laquelle se transforme en un cercle, pour $b = a$, puisqu'alors on a

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

PROBLÈME VIII.

Trouver le lieu du sommet d'un triangle isocèle dont la base est sur une droite donnée et dont les côtés égaux passent par deux points fixes (fig. 42).



Soient A et A' les deux points donnés et UU' la droite sur laquelle sont situées les bases. D'abord le point A' sera un point du lieu : car, en abaissant A'T' perpendiculaire sur UU' et prenant T'B' = T'B'', on aura un triangle isocèle A'B''B', donc A' est un point du lieu. On établirait de même l'existence du point A.

D'un autre côté, si par A et A', nous traçons des parallèles et des perpendiculaires à UU', ces droites pourront être regardées comme des génératrices d'un point du lieu, puisqu'elles forment des angles égaux à 0° ou à 90° avec UU' : de plus, ces deux systèmes de génératrices ne se rencontrant qu'à l'infini, il s'ensuit que la courbe demandée, s'étendant à l'infini dans deux sens opposés, sera UNE HYPERBOLE, *si toutefois son équation est du second degré.*

Les considérations précédentes nous conduisent à prendre pour axes coordonnés la parallèle et la perpendiculaire à UU', tracées par le point O, centre de symétrie des points spéciaux A et A'.

Ceci posé, soient AM et A'M un couple de génératrices, ici rectilignes, donnant le point M, le triangle isocèle MHK déterminera pour ces droites des directions égales, mais de signes contraires; donc

$$\text{AM)} \quad y - b = m(x - a) \quad \text{et} \quad y + b = -m(x + a) \quad \text{(A'M}$$

seront leurs équations; (a, b) étant les coordonnées du point A et par suite $(-a, -b)$ celles de A'.

Maintenant il est évident (VIe Leçon) que l'élimination de la CONSTANTE VARIABLE m entre ces relations donnera l'équation du lieu; d'où, en opérant par voie de division,

$$\frac{y - b}{y + b} = -\frac{x - a}{x + a};$$

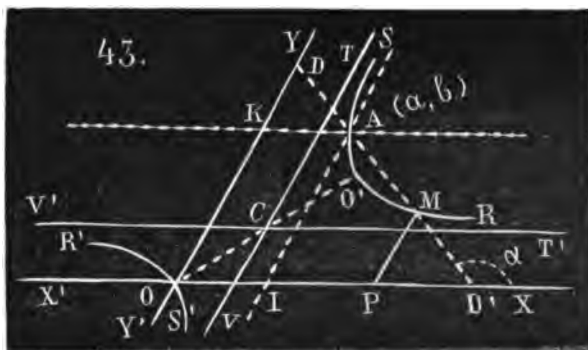
et par suite

$$xy = ab\ldots.. \quad (h).$$

Ainsi *le lieu est une hyperbole équilatère* (car les axes coordonnés sont rectangulaires) *rapportée à ses asymptotes.*

PROBLÈME IX.

Quel est le lieu des points qui divisent en moyenne et extrême raison, les droites menées par un point donné et comprises entre deux droites fixes (fig. 43)?



Soient A, XX′ et YY′ le point et les droites donnés : ces dernières limitant la génératrice DD′.

Il est d'abord évident que le point A sera un point du lieu demandé; car, en menant AI et AK parallèlement aux droites données, il suffira de regarder OI comme le moindre segment d'une droite inconnue OD′, divisée en moyenne et extrême en I, pour que la génératrice DD′ détermine le point A; de plus, l'intersection O de XX′ et YY′ sera également sur la ligne cherchée, car la partie de AO interceptée entre ces droites, étant nulle, le plus grand segment sera nul : d'où le point O.

Enfin, les génératrices parallèles à OX et OY étant infinies, les points correspondants se transportent à l'infini dans ces deux sens; donc, déjà on peut légitimement supposer que *si le lieu cherché est du second ordre*, il appartiendra *au genre hyperbolique* et que ses asymptotes seront parallèles à OX et OY que nous allons, du reste, prendre pour axes des coordonnées.

Soient (a, b) les coordonnées du point A et α la direction d'une génératrice quelconque DD′, son équation sera

$$y - b = \alpha (x - a) \; \ldots\ldots \; (DD') \text{ ou } (G);$$

et pour abscisse à l'origine

$$OD' = \frac{a\alpha - b}{\alpha}.$$

Or, le point M donné par cette génératrice divisant DD′ en moyenne et extrême raison c'est-à-dire qu'ayant

$$DD' : DM :: DM : MD',$$

on doit également avoir

$$OD' : OP :: OP : PD';$$

mais l'abscisse OP vaut le plus grand segment de OD′ divisée comme DD′ en M, donc

$$1 : \frac{-1+\sqrt{5}}{2} :: x : \frac{a\alpha - b}{\alpha} - x \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a\alpha - b}{2\alpha}(-1+\sqrt{5}) \ldots (PM) \text{ ou } (G'),$$

sera l'équation de la seconde génératrice du point M.

Enfin l'élimination (VIe leçon) de la *constante variable* α entre (G) et (G′), donne,

$$2xy - b(3 - \sqrt{5})\,x - a(-1 + \sqrt{5})\,y = 0 \; \ldots\ldots \quad (h).$$

Donc, le lieu est bien *une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux droites* XX′ *et* YY′ *et passant par l'origine et le point* (a, b).

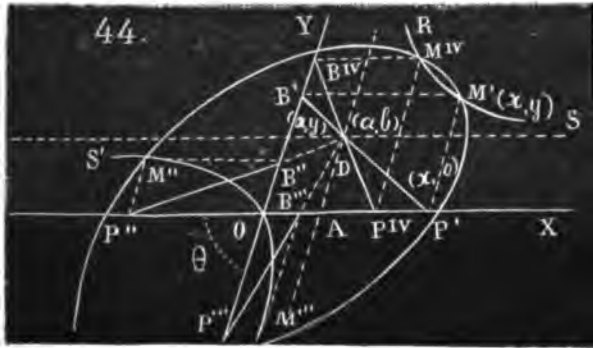
Les équations du centre

$$2y - b(3 - \sqrt{5}) = 0 \quad \text{et} \quad 2x - a(-1 + \sqrt{5}) = 0,$$

déterminent ce point; et par suite les asymptotes, auxquelles se réduit le lieu, si le point A se trouve sur XX′ ou YY′

PROBLÈME X.

D'un point D donné de position à l'égard des deux droites XX′ et YY′ formant l'angle θ, tracer une droite DP′ telle que la partie interceptée B′P′ soit égale à m (fig. 44).



Prenons les droites XX′ et YY′ comme axes coordonnés et désignons par (a, b) les coordonnées du point (D); de plus, soient (x, o) et (o, y) les variables des intersections de DP′, avec OX et OY, alors (x, y) seront les coordonnées d'un certain point M′ que nous nous proposerons de déterminer au moyen de deux lignes s'y coupant.

D'un autre côté les triangles semblables B′OP′ et DAP′ donnent

$$OB' \text{ ou } y : DA \text{ ou } b :: OP' \text{ ou } x : AP' \text{ ou } x - a,$$

d'où

$$xy - ay - bx = 0 \qquad (h);$$

c'est-à-dire *une hyperbole passant par l'origine, dont le centre est en* D *et dont les asymptotes sont parallèles à* OX *et* OY.

D'autre part, en désignant par θ l'angle YOX, il vient, par le triangle B′OP′,

$$OB'^2 + OP'^2 - 2OB' \cdot OP' \cdot \cos.\theta = B'P'^2$$

ou

$$y^2 + x^2 - 2xy \cos.\theta = m^2 \qquad (e);$$

c'est-à-dire *une ellipse ayant l'origine pour centre et se réduisant à une circonférence pour* $\theta = 90^\circ$.

Ces courbes (h) et (e) se coupent généralement en quatre points M′, M^{IV}, M″ et M‴ dont les abscisses OP′, OP^{IV}, OP″ et OB‴ ou les ordonnées OB′, OB^{IV}, OB″ et OP‴ déterminent un second point de la droite cherchée qui peut avoir ainsi quatre positions.

N B. La situation de l'ellipse par rapport à l'hyperbole indique que les solutions DB″P″ et DB‴P‴ existent toujours, mais qu'il n'en est pas de même pour les deux autres B′DP′ et B^{IV}DP^{IV} qui peuvent *exister, se confondre* ou *disparaître*, suivant que la branche RM′S de l'hyperbole est *sécante, tangente* à l'ellipse ou *ne coupe pas* cette dernière.

PROBLÈME XI.

Déterminer le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont des normales à une parabole.

Nous avons précédemment reconnu que pour un certain système de coordonnées rectangulaires, la parabole avait pour équation

$$y^2 = 2px \ldots\ldots \qquad (P).$$

Ceci posé, la normale au point (x', y') de la courbe (P), est

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x');$$

et, comme elle passe par le point (α, β) du lieu demandé,

$$\beta - y' = -\frac{y'}{p}(\alpha - x'),$$

ou, abstraction faite de l'accentuation,

$$\beta - y = -\frac{y}{p}(\alpha - x) \qquad (1),$$

constituera une relation qui, prise simultanément avec (P), donnera les points de la parabole pour lesquels la normale passerait par le point (α, β); et en éliminant x on obtient

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0 \qquad (2).$$

Or, en désignant par y_1, y_2 et y_3 les trois valeurs de y, nous avons, par une propriété des équations algébriques,

$$y_1\, y_2\, y_3 = 2p^2\beta \qquad (3);$$

et, comme pour deux de ses points les normales sont rectangulaires,

$$\left(-\frac{y_1}{p}\right)\left(-\frac{y_2}{p}\right) = -1 \quad \text{ou} \quad y_1\, y_2 = -p^2 \qquad (3').$$

En substituant (3') dans (2), on obtient

$$y_3 = -2\beta:$$

mais, cette valeur devant vérifier (1), il vient

$$\beta\,[4\beta^2 - 2p\alpha + 3p^2] = 0,$$

et par suite les deux lieux

$$\varphi) \qquad \beta = 0 \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{p}{2}\left(\alpha - \frac{3p}{2}\right) \qquad (\varphi';$$

c'est-à-dire *l'axe des* X *et une parabole :* la première solution doit évidemment être rejetée; la seconde est celle demandée.

REMARQUES I. La relation (3') donnant

$$y_1^2 y_2^2 = p^4 \quad \text{on en déduit par (P)} \quad p^4 = 4px_1x_2;$$

d'où

$$x_1\, x_2 = \frac{1}{4}p^2.$$

II. Enfin, (2) étant privée du terme en y^2,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

donc, à cause de $y_2 = -2\beta$,

$$\beta = \frac{1}{2}(y_1 + y_2);$$

c'est-à-dire que *l'ordonnée du lieu est moyenne arithmétique entre les ordonnées du pied des normales sur* (P).

PROBLÈME XII.

D'un point pris sur l'axe d'une courbe du second ordre, on trace une sécante quelconque et par le point d'intersection de cette sécante avec la tangente au sommet, on même une parallèle à l'axe : quel est lieu du point de rencontre de cette sécante avec la droite qui joint le sommet de la courbe au point où cette dernière est coupée par la parallèle à l'axe (fig. 45) ?

Soient OX l'axe de la courbe, OY la tangente au sommet et I le point (d, o) de départ des sécantes, telles que IK.

D'abord la génération du lieu indique le sommet O comme lui appartenant : car IK couchée sur IO fait coïncider la génératrice OH avec la tangente OY, d'où le point O.

Procédons maintenant analytiquement, l'équation de la directrice est

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0 \ldots\ldots \qquad \text{(D)}$$

[*ellipse*, *parabole* ou *hyperbole* suivant que l'on aura $q \lesseqgtr 0$]; de plus, (d, o) étant les coordonnées du point I,

$$y = a(x - d) \qquad \text{(G)},$$

sera la génératrice IK; et comme OK $= -ad$, nous aurons, en désignant par x' l'abscisse du point H où la parallèle, du point K à l'axe, coupe la directrice (D),

$$y = \frac{-ad}{x'}x \qquad \text{(G')}$$

pour la seconde génératrice OH.

Enfin, le point $(x', -ad)$ étant sur (D), nous avons l'équation de condition

$$a^2d^2 - 2px' - qx'^2 = 0 \qquad (1).$$

Ceci posé, en éliminant (VIe leçon) LES CONSTANTES VARIABLES a et x' entre (1), (G) et (G'), on obtiendra l'équation du lieu demandé. Or, (G) donne

$$a) \qquad a = \frac{y}{x-d}, \quad \text{et, par suite de (G')}, \quad x' = \frac{-dx}{x-d} \ldots. \qquad (x';$$

d'où, en substituant dans (1),

$$y^2 - 2px - \left(q - \frac{2p}{d}\right)x^2 = 0 \qquad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu est également une courbe du second ordre et sera* UNE ELLIPSE, UNE PARABOLE OU UNE HYPERBOLE suivant que l'on aura

$$q - \frac{2p}{d} \lesseqgtr 0 \qquad (2).$$

DISCUSSION I. Soit (D) *elliptique*, c'est-à-dire

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad q = -\frac{b^2}{a^2},$$

alors (2) se transforme en

$$-\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{2a+d}{d}\right\} \lesseqgtr 0.$$

Donc (φ) sera *elliptique :* pour $d > 0$, ou $d < 0$ avec $d > 2a$ (*numériquement*); *parabolique :* lorsque $d = -2a$; et *hyperbolique :* lorsque l'on aura $d < 0$ avec $d < 2a$ (*numériquement*).

II. Si la directrice (D) est *une parabole*, $q = 0$ et (φ) devient

$$y^2 - 2px + \frac{2p}{d}x^2 = 0 \ldots . \qquad (\varphi');$$

et de ce que p ne peut être nul, ce lieu sera *elliptique* ou *hyperbolique*, suivant que l'on aura

$$\frac{2p}{d} \gtrless 0.$$

III. Soit enfin (D) *hyperbolique*, il vient

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad q = \frac{b^2}{a^2};$$

d'où, pour (2),

$$\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{d-2a}{d}\right\} \lesseqgtr 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d-2a}{d} \lesseqgtr 0.$$

Ainsi (φ) sera *une ellipse*, pour $d > 0$ avec $d > 2a$; *une parabole*, pour $d = 2a$; et *une hyperbole*, pour $d > 0$ avec $d > 2a$, ou $d < 0$ avec $d > 2a$ (*numériquement*).

PROBLÈME XIII.

Déterminer le lieu du point milieu d'une sécante menée par un point donné à une courbe du second ordre.

Étudions d'abord la nature de la courbe demandée, en considérant comme directrice chacun des trois genres des lieux du second ordre.

I. GENRE ELLIPTIQUE, — Quelle que soit la position *du point directeur*, aucune sécante ne pourra être infinie, et par suite le lieu limité de toute part *sera du genre directeur*.

II. PARABOLE. — La sécante parallèle aux diamètres étant infinie, le lieu sera infini dans ce sens et indique le caractère $B^2 - AC = 0$.

III. $B^2 - AC > 0$.—Ici, les sécantes parallèles aux asymptotes étant infinies, la courbe demandée sera ouverte dans deux sens; et par suite sera de la même nature *que la directrice*.

Ainsi, en résumé *le lieu demandé appartiendra toujours au genre directeur*.

Cherchons maintenant les points remarquables qui peuvent résulter de la position du point directeur par rapport à la directrice et au genre de cette dernière.

I. Point directeur intérieur à la	Courbe directrice	à centre.		Si on trace le diamètre et la corde conjuguée de ce point, il est évident que *le centre* et *le point directeur* appartiendront au lieu qui sera *intérieur* pour l'ellipse; et aura *une branche interne* et *une branche externe* pour l'*hyperbole*.
		sans centre		Dans ce cas, *le point* que donnait le diamètre précédent disparaît et la courbe *est interne*.
II. Point directeur situé sur la	Courbe directrice.	$B^2 - AC \gtrless 0$.		La corde conjuguée du diamètre du point sera une tangente, donc le *lieu est tangent en ce point à la directrice dont le centre est celui de la courbe cherchée*. De plus le lieu, *interne* pour l'ellipse, a *une branche interne* et *une autre externe pour l'hyperbole*.
		$B^2 - AC = 0$.		Le lieu est *interne et tangent à la directrice* et n'admet pas de point situé sur le diamètre passant par le point donné.
III. Point directeur extérieur à la	Courbe directrice	Elliptique		Si du point on trace 1° Le diamètre et sa corde conjuguée; le diamètre donnera *le centre*, et la corde ne paraît rien donner, puisque le point est extérieur : cette conclusion serait fausse ainsi que nous le ferons voir. 2° Les deux tangentes à la directrice donneront *les points d'intersection* de cette dernière avec le lieu demandé.
		$B^2 - AC = 0$.		Les considérations précédentes sur l'ellipse subsistent, seulement le diamètre du point donné ne donne aucun point de la courbe cherchée.
		Hyperbolique.	Comprise avec le point directeur dans un même angle des asymptotes.	Si du point on trace 1° le diamètre et sa corde conjuguée, le premier donne *le centre* et la seconde, quoique ne rencontrant pas la courbe, donne le *point directeur*, ainsi que nous l'expliquerons. 2° les tangentes à la courbe directrice déterminent *les intersections* de cette dernière avec le lieu cherché dont une branche *extérieure* passe par le centre et l'autre est sécante.
			Non comprise avec le point directeur dans un même angle des asymptotes.	Si du point on trace 1° le diamètre et sa corde conjuguée, cette dernière donne *le point directeur* et le premier *le centre*. 2° les tangentes à la directrice donnent les intersections de la branche sécante qui passe par le centre, tandis que l'autre branche est extérieure et admet le point directeur.

Procédons maintenant à la détermination analytique du lieu demandé, ainsi qu'à la recherche de ses particularités.

Nous pouvons prendre pour équation de la directrice

$$y^2 + 2px + qx^2 = 0 \qquad \text{(D)};$$

et, en appelant (α, β) les coordonnées du point directeur,

$$y - \beta = m(x - \alpha) \quad \text{ou} \quad y = mx + (\beta - m\alpha) \qquad (G),$$

sera l'équation de la sécante génératrice : m étant la *constante variable*.

Ceci posé, (D) et (G) donnent, pour les abscisses des extrémités de (G),

$$x^2 + 2.\frac{p + m\beta - m^2\alpha}{m^2 + q}x + \frac{(\beta - m\alpha)^2}{m^2 + q} = 0;$$

d'où, en désignant par x' et x'' leurs valeurs et par x l'abscisse du milieu de cette sécante,

$$x = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{p + m\beta - m^2\alpha}{m^2 + q},$$

ou

$$m^2(x - \alpha) + \beta m + (qx + p) = 0 \qquad (G').$$

Or, cette équation (G') constitue une nouvelle génératrice du lieu; donc, ce dernier sera donné par l'élimination de la constante variable m entre (G) et (G'); c'est-à-dire par

$$y^2 + qx^2 - \beta y - (q\alpha - p)x - p\alpha = 0 \qquad (\varphi).$$

Ainsi le *lieu cherché* (φ) *est bien du second degré et du même genre que* (D), puisque les coefficients des termes du second degré n'ont point variés.

DISCUSSION. D'abord *le point directeur* (α, β) est un point de (φ), car on a

$$\beta^2 + q\alpha^2 - \beta^2 - (q\alpha - p)\alpha - p\alpha = 0;$$

d'un autre côté, le centre de (D) a pour équation

$$2y = 0 \quad \text{et} \quad 2qx + 2p = 0;$$

c'est-à-dire pour coordonnées

$$\left(-\frac{p}{q}, 0\right),$$

et (φ), pour ces valeurs, devient

$$(0)^2 + q\left(-\frac{p}{q}\right)^2 - \beta(0) - (q\alpha - p)\left(-\frac{p}{q}\right) - p\alpha = 0 :$$

le *centre* de (D) est donc un point de (φ).

Enfin, les points où la courbe (φ) coupe l'axe des X sont donnés par

$$qx^2 - (q\alpha + p)x - p\alpha = 0;$$

c'est-à-dire par

$$x' = \alpha \quad \text{et} \quad x'' = -\frac{p}{q} :$$

le second de ces points est *le centre* de (D), quant au premier il résulte de ce fait géométrique que l'axe des X est un axe de symétrie de (D) et que sa corde conjuguée passant par le point (α, β) lui est perpendiculaire.

Maintenant pour avoir les points communs à (D) et à (φ), combinons (φ) et (D) par soustraction, il vient

$$\beta y + (q\alpha - p)x + p\alpha = 0. \quad (c);$$

et comme cette fonction représente une droite, il s'ensuit que (D) et (φ) ne pourront se couper en plus de deux points : de plus (*c*) n'est autre chose que la corde des contacts des tangentes à (D), tracées par le point (α, β), lorsque ce point est extérieur.

Cherchons la position de (*c*) par rapport à (D), en éliminant y entre elles, la valeur de x contient l'expression

$$\sqrt{\beta^2 + 2p\alpha + q\alpha^2}.$$

Or, par un théorème subséquent (V), ce radical sera *réel, nul* ou *imaginaire* suivant que le point (α, β) sera *extérieur, sur* ou *intérieur* à (D); c'est-à-dire que dans ces diverses circonstances (φ) sera *sécant, tangent* ou *intérieur* à (D), ce que de simples considérations géométriques nous avaient déjà fait prévoir.

Enfin, il n'est pas dénué d'importance de remarquer que *le centre*

$$\left[\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{q}\right),\quad \left(\frac{0}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

de (φ), *est situé au milieu du point* (α, β) *au centre de* (D).

Il nous reste maintenant à connaître de *l'existence géométrique* de la portion de (φ) extérieure à (D), lorsque (α, β) est extérieur à cette dernière ligne, car son *mode analytique* résulte de ce fait que lorsque (G) ne coupe point (D), les abscisses des points communs sont *imaginaires,* mais *conjuguées;* et par suite une *expression réelle* pour leur demi-somme.,

Quant au point de vue géométrique, considérons spécialement l'ellipse, rapportée à ses axes,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

on obtient alors pour (φ)

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2\beta y + b^2\alpha x = 0 \qquad (\varphi),$$

ou, en appelant ρ le rapport des axes,

$$y^2 + \rho^2x^2 - \beta y + \rho^2\alpha x = 0;$$

c'est-à-dire que le lieu (φ) n'est point celui donné par l'ellipse particulière (D), mais bien celui qu'on obtiendrait en considérant *toutes les ellipses concentriques avec* (D), *et qui lui seraient semblables de forme et de position.*

Ce mode de démonstration convient également au cas ou (D) serait *hyperbolique* ou *parabolique.*

Ainsi l'analyse et la synthèse sont ici complétement d'accord et, quoiqu'il n'en soit pas toujours ainsi, il était digne d'intérêt de faire remarquer au lecteur comment l'emploi de symboles imaginaires pouvait, par la destruction de leur partie symbolique contenant le facteur $\sqrt{-1}$, donner la solution d'un problème plus général que celui posé primitivement.

N. B. Toute la théorie précédente mérite, au double point de vue de l'analyse et de la synthèse, de fixer l'attention du lecteur.

PROBLÈME XIV.

Déterminer le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangens à une courbe du second ordre.

Nous avons précédemment reconnu que la directrice du second ordre, avait pour expression analytique

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0\ldots \qquad (D),$$

De plus, nous aurons, en désignant par (α, β) les coordonnées d'un point du lieu demandé,

$$y - \beta = m(x - \alpha) \quad \text{ou} \quad y = mx + (\beta - m\alpha) \qquad (1)$$

pour l'équation générale des deux côtés de l'angle constant V.

Ceci posé, l'élimination de y entre (D) et (1) donne, pour les abscisses des points d'intersection de ces lignes,

$$(m^2 - q)\,x^2 + 2\,[m(\beta - m\alpha) - p]\,x + (\beta - m\alpha)^2 = 0\,;$$

et, comme ces abscisses doivent être égales, il vient, pour déterminer m,

$$\alpha(q\alpha + 2p)\,m^2 - 2(p + q\alpha)\,\beta m + (q\beta^2 + p^2) = 0\,;$$

d'où, m' et m'' désignant les deux valeurs de m,

$$m' + m'' = \frac{2\beta(p + q\alpha)}{\alpha(q\alpha + 2p)} \quad \text{et} \quad m'm'' = \frac{q\beta^2 + p^2}{\alpha(q\alpha + 2p)}\,;$$

et, par suite,

$$(m' - m'')^2 = (m' + m'')^2 - 4m'm'' = \frac{4p^2(\beta^2 - 2p\alpha - q\alpha^2)}{\alpha^2(q\alpha + 2p)^2}.$$

D'un autre côté, les axes étant rectangulaires,

$$\text{tg. V} \quad \text{ou} \quad V' = \frac{m' - m''}{1 + m'm''},$$

d'où, en remplaçant $m'm''$ et $m' - m''$ par leurs valeurs,

$$V' = \frac{2p\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha - q\alpha^2}}{q(\alpha^2 + \beta^2) + p(p + 2\alpha)}\,;$$

et, en élevant un carré,

$$V'^2.\,[q(\alpha^2 + \beta^2) + p(2\alpha + p)]^2 = 4p^2(\beta^2 - 2p\alpha - q\alpha^2) \qquad (\varphi).$$

Ainsi le *lieu est du 4e degré et le même pour l'angle supplémentaire de* V.

DISCUSSION I. $V = 0$ *ou* $V' = 0$ donne

$$\beta^2 - 2p\alpha - q\alpha^2 = 0\,;$$

c'est-à-dire *la directrice.*

II. $V = 90°$ *ou* $V' = \infty$ exige

$$q(\alpha^2 + \beta^2) + p(p + 2\alpha) = 0$$

donnant

$$\beta^2 + \left(\alpha + \frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}(1 - q) \qquad (\varphi')\,;$$

c'est-à-dire *une circonférence,* dont le centre et le rayon sont donnés par

$$\left(-\frac{p}{q}, 0\right) \quad \text{et} \quad \frac{p}{q}\sqrt{1 - q}.$$

N. B. Lorsque (D) est *une parabole*, $q = 0$ et (φ') devient

$$2\alpha + p = 0;$$

ou une parallèle à l'axe des Y, qui sera reconnue plus tard comme directrice de (D).

Enfin, si (D) est *une hyperbole*, (φ') se réduit *à son centre* ou devient *imaginaire* pour

$$a = b \quad \text{ou} \quad a < b.$$

III. Supposons pour terminer que (D) soit encore *une parabole*, mais que V *ou* V' soit quelconque, alors (φ) se transforme en

$$4\beta^2 - 4V'^2\alpha^2 - 4p\,(2 + V'^2)\,\alpha - V'^2p^2 = 0 \qquad (\varphi'');$$

et cette hyperbole, *équilatère pour* $V = 45°$, *ne peut jamais se réduire à ses asymptotes.*

Intersection de deux courbes du second ordre.

106. Soient

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (\varphi),$$
$$A'y^2 + 2B'xy + C'x^2 + 2D'y + 2E'x + F = 0 \qquad (\varphi'),$$

les deux courbes proposées.

Nous savons que l'élimination de y entre ces fonctions, donne une équation du 4me degré en x admettant pour cette variable, *quatre*, *deux* ou *zéro* racines réelles; c'est-à-dire que (φ) et (φ') peuvent se couper en *quatre points*, *en deux points*, *ou ne pas se rencontrer*.

Il est important que le lecteur n'oublie pas que si (φ) et (φ') étaient tangentes en un point, le point de contact représenterait deux points confondus en un seul.

Or, P, Q, R et S étant ces quatre points *réels* ou *imaginaires*, on aura :

1° Les points étant tous *réels*, trois couples de droites (PQ, RS), (PS, QR) et (PR, QS).

2° R et S étant *imaginaires*, on a *la droite réelle* PQ; et celle RS *non moins réelle* que la précédente, puisque *les coordonnées* de R *et* S *sont conjuguées*.

3° Les quatre points étant *imaginaires*, (φ) et (φ') ont encore *un couple de sécantes communes*, passant par les points dont *les coordonnées sont imaginaires et conjuguées*.

Déterminons ces sécantes communes : à cet effet, combinons (φ) et (φ') par voie d'addition, toutefois après avoir multiplié l'une d'elles, (φ') par exemple, par un facteur *indéterminé* λ, il vient

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 \qquad (\psi);$$

en posant, pour abréger,

$$A + A'\lambda = a, \quad B + B'\lambda = b, \quad C + C'\lambda = c, \quad \text{etc.}$$

Ce lieu (ψ), passant par les points P, Q, R et S, donne

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{(b^2 - ac)\,x^2 + 2\,(bd - ae)\,x + d^2 - af};$$

d'où, pour la condition rendant *linéaire* cette valeur de y,

$$(bd - ae)^2 - (b^2 - ac)\,(d^2 - af) = 0 \qquad (1);$$

c'est-à-dire une équation *du troisième degré en* λ.

Or, (1) étant résolue par rapport à λ, on obtient, pour les sécantes précédentes,

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} \pm \frac{1}{a}\left\{ x\sqrt{b^2 - ac} + \frac{bd - ae}{\sqrt{b^2 - ac}} \right\} \quad (2),$$

avec la condition

$$b^2 - ac > 0$$

pour les valeurs réelles de λ déduites de (1); et comme (*Théorie générale des équations*) *une* au moins est réelle, on reconnaît que

1° Si λ a ses trois valeurs réelles et si *chacune* ou *deux* d'entr'elles donnent

$$b^2 - ac > 0,$$

il y a *trois couples* de cordes communes : donc (φ) et (φ′) se coupent *en quatre points.*

2° Si les 3 valeurs de λ étant encore *réelles* et qu'*une* seule donne

$$b^2 - ac > 0,$$

il existe *un couple* de sécantes communes, mais *aucun* point commun à (φ) et (φ′).

3° Si (1) ne donne qu'*une seule* valeur réelle pour λ, les courbes ne peuvent se couper *en plus de deux points* et *se couperont* en deux points. C'est ce dont on peut s'assurer en rapportant (φ) et (φ′) aux deux sécantes communes comme axes coordonnés et appliquant la méthode ci-dessus.

APPLICATION. Soient

$$(\varphi) \quad y^2 + x^2 - 2x - y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad xy - 4x - 2y = 0 \quad (\varphi'),$$

on a, pour (φ) + λ (φ′) = 0,

$$y^2 + \lambda xy + x^2 - 2(1 + 2\lambda)x - (1 + 2\lambda)y - 1 = 0 \quad (\psi),$$

d'où, en résolvant.

$$y = -\frac{\lambda}{2}x + \frac{1 + 2\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - 4)x^2 + 2(4 - \lambda)(1 + 2\lambda)x + [(1 + 2\lambda)^2 + 4]};$$

et par suite, pour que y soit *linéaire*,

$$(4 - \lambda)^2(1 + 2\lambda)^2 - (\lambda^2 - 4)[(1 + 2\lambda)^2 + 4] = 0,$$

ou

$$8\lambda^3 - 11\lambda^2 - 18\lambda - 9 = 0 \quad (1).$$

Or, cette équation admet la racine *réelle* positive 2,470217, donnant

$$b^2 - ac \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 4 > 0;$$

donc les équations des sécantes sont

$$2y + \left[\lambda \pm (1 + 2\lambda)\sqrt{5 - 2\lambda}\right]x - \left[1 + 2\lambda \mp \frac{4 - \lambda}{\sqrt{5 - 2\lambda}}\right] = 0;$$

et par suite, en les considérant simultanément avec (φ) ou (φ′), on aura deux équations du second degré en x donnant : l'une *des valeurs imaginaires* pour x, et l'autre *deux valeurs réelles;* donc, (φ) et (φ′) se coupent seulement *en deux points.*

REMARQUE. Il peut arriver que l'élimination de y entre (φ) et (φ′) conduise à une équa-

tion trinôme bi-carrée en x; alors, il est préférable de résoudre directement cette dernière et *chaque valeur réelle* de x, à laquelle correspondrait *une expression de même forme* pour y, déterminerait un point commun à (φ) et à (φ').

Exercices.

107. Voici quelques nouvelles applications.

1° Étant donné un trapèze à surface constante et dont un côté latéral varie, on demande le lieu de l'intersection de ses diagonales.

2° Quel est le lieu du centre des courbes du second ordre passant par quatre points donnés?

3° D'un point donné, on mène des tangentes à une série de paraboles ayant même axe et même sommet; quel est le lieu des points de contact?

4° Quel est le lieu des points de contact des tangentes menées à des ellipses *ou* à des hyperboles semblables de forme et de position, sachant que ces tangentes sont parallèles?

5° Quel est le lieu des pieds des normales menées à une série d'ellipses *ou* d'hyperboles semblables de forme et de position, sachant que ces normales sont parallèles?

6° Déterminer les intersections des courbes

$$y^2 + 3x - 4y - 2 = 0 \quad \text{et} \quad xy - x - y + 2 = 0.$$

---

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

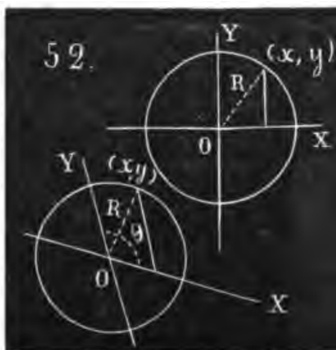
DE LA CIRCONFÉRENCE.

XXVIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Formes diverses de l'équation de la circonférence. — Construction. — Théorèmes de géométrie élémentaire démontrés par la méthode de Descartes.

Formes diverses de l'équation de la circonférence.



108. La définition usuelle de la circonférence donne immédiatement (fig. 52).

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1),$$

pour cette ligne rapportée à deux diamètres rectangulaires ; et (fig. 52)

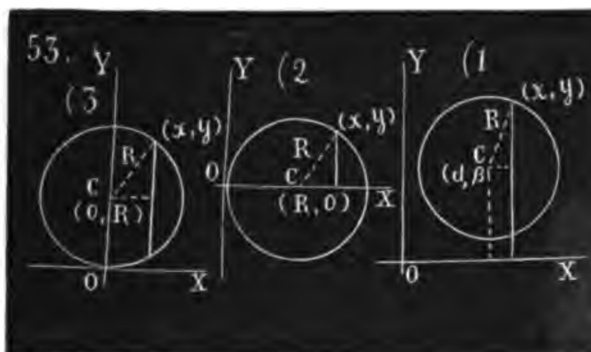
$$x^2 + y^2 + 2xy \cos. \theta = R^2 \qquad (1'),$$

lorsque les deux diamètres forment un angle θ.

N. B. La forme (1) a déjà été obtenue de l'ellipse, en posant

$$b = a$$

dans la fonction analytique de cette dernière ligne rapportée à ses axes de symétrie. Donc, on peut considérer la circonférence comme étant une ellipse spéciale.



Si maintenant nous considérons la circonférence rapportée à deux axes rectangulaires quelconques ; nous aurons [fig. 53, 1)]

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \quad (2);$$

R et (α, β) désignant son rayon et les coordonnées du centre. Cette dernière relation prend la forme

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = R^2 \quad ou \quad x^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

lorsque le centre est situé sur l'axe des X ou des Y; et particulièrement [fig. 53, 2) *ou* 3)]

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0 \quad ou \quad x^2 + y^2 - 2Ry = 0,$$

si l'origine est une extrémité du diamètre pris pour axe des abscisses *ou* des ordonnées.

N. B. La fonction (2) développée est de la forme

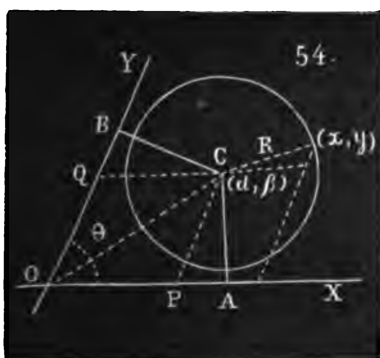
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0;$$

expression qui, pour des coordonnées rectangulaires, accuse de suite une circonférence : car, en complétant les carrés des variables, il vient

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4};$$

c'est-à-dire *une circonférence ayant pour centre*

$$\left[-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right] \quad \textit{et pour rayon} \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}.$$



De plus *cette circonférence se réduit à son centre* ou *est imaginaire* suivant que l'on a

$$a^2 + b^2 - 4c \ \overline{\overline{<}}\ 0.$$

Enfin, lorsque la circonférence est rapportée à des axes obliques quelconques, on a spontanément (fig. 54)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos.\theta=R^2 \quad (2');$$

ou, en développant,

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos.\theta + ax + by + c = 0.$$

Pour construire la circonférence : prenons sur OX, $OA = -\frac{a}{2}$ et sur OY, $OB = -\frac{b}{2}$; et élevant par ces points des perpendiculaires à OX et à OY, on aura, par leur intersection, *le centre* C. Puis, traçant CO, le rayon du cercle sera

$$R = \sqrt{\overline{CO}^2 - c} = \sqrt{\overline{CO}^2 - (\sqrt{c})^2}.$$

En effet, on a

$$-\frac{a}{2} = \alpha + \beta \cos.\theta, \; -\frac{b}{2} = \beta + \alpha \cos.\theta \quad \text{et} \quad c = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos.\theta - R^2;$$

d'où, en substituant les valeurs de a, de b et de c, il vient

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos.\theta = R^2;$$

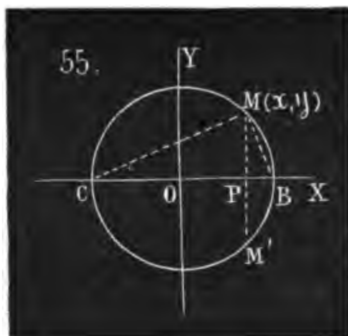
c'est-à-dire (2'). C. Q. F. D.

109. Les diverses formes de l'équation de la circonférence, nous permettent de passer en revue quelques propositions établies en géométrie élémentaire.

Théorèmes sur le cercle.

THÉORÈME I.

Tout diamètre divise le cercle et la circonférence en deux parties égales (fig. 55).



En effet, le cercle, rapporté à deux diamètres rectangulaires, est

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

d'où

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2};$$

et comme $x < R$, donne pour y deux valeurs égales et de signes contraires, en faisant tourner CM'B autour de CB pour l'appliquer sur CMB, le point M' se juxtaposera sur M; car PM' = PM et les angles en P sont droits. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Le diamètre perpendiculaire à une corde, divise cette dernière en deux parties égales.*

THÉORÈME II.

L'ordonnée perpendiculaire à un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur ce diamètre (fig. 55).

En effet, de

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{on déduit} \quad y^2 = (R + x)(R - x),$$

ou

$$\overline{MP}^2 = CP.BP. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME III.

Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre mené par une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre (fig. 55).

Car, on a

$$CM^2 = y^2 + (x + R)^2 = y^2 + x^2 + 2Rx + R^2;$$

et, en simplifiant au moyen de $x^2 + y^2 = R^2$,

$$CM^2 = 2R^2 + 2Rx = 2R\,(R + x),$$

d'où

$$CM^2 = CB.\ CP. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME IV.

Tout angle inscrit dans un demi-cercle, est droit (fig. 55).

En effet, les droites CM et BM ont pour directions

$$\frac{y}{x+R} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x-R},$$

d'où, pour leur produit,

$$\frac{y^2}{x^2 - R^2} = -1,$$

puisque $x^2 + y^2 = R^2$ et que les axes sont rectangulaires. C. Q. F. D.

THÉORÈME V.

Les angles inscrits dans un même segment, sont égaux; et chacun vaut la moitié de l'angle au centre correspondant (fig. 56).

Soit $AB = 2c$ la corde du segment, en la prenant pour axe des X et le diamètre perpendiculaire pour droite des ordonnées; nous aurons

$$x^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

pour la circonférence : β étant l'ordonnée du centre et R le rayon. Mais de ce que $c^2 + \beta^2 = R^2$, la relation précédente se transforme en

$$x^2 + y^2 - 2\beta y = c^2.$$

Ceci posé

$$d = \frac{y}{x+c} \quad \text{et} \quad d' = \frac{y}{x-c},$$

seront les directions des cordes BM et AM ; d'où, les axes étant rectangulaires,

$$\text{tg. M} = \frac{d' - d}{1 + dd'} = \frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2};$$

et par suite, à cause de la relation analytique de la circonférence,

$$\text{tg. M} = \frac{2cy}{2\beta y} = \frac{c}{\beta} = \textit{constante}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

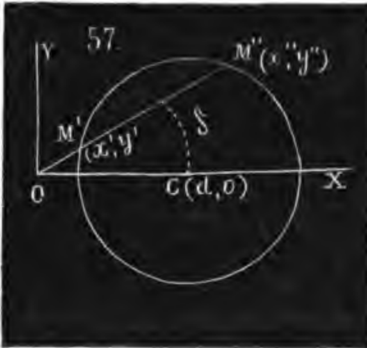
De plus, le triangle rectangle COA donnant

$$1 : \text{tg. OCA} :: \beta : c;$$

on a

$$\text{tg. OCA} = \frac{c}{\beta} = \text{tg. M} \quad \text{ou} \quad \text{OCA} = \text{M} = \tfrac{1}{2}\,\text{BCA}.$$

THÉORÈME VI.



Si d'un point pris sur le plan d'un cercle, on trace une droite limitée à sa circonférence, le rectangle des segments de cette droite, compris entre le point et la circonférence, sera constant (fig. 57).

Soit O le point donné, la sécante quelconque OM'M'' donnera

$$\text{OM}' . \text{OM}'' = \textit{constante}.$$

En effet, prenons la droite diamétrale OC pour axe des X, l'origine en O et les coordonnées rectangulaires; nous aurons, (d, o) étant le centre et R le rayon,

$$(x - d)^2 + y^2 = \text{R}^2 \qquad \text{(D)}$$

pour la circonférence.

Ceci posé, soit la sécante

$$y = \delta x .... \qquad (\text{OM}'\text{M}''),$$

alors, (x', y') et (x'', y'') étant les coordonnées des points M' et M'', il vient

$$y' = \delta x' \quad \text{et} \quad y'' = \delta x'';$$

ainsi que

$$\left.\begin{aligned} \text{OM}'^2 &= x'^2 + y'^2, \\ \text{OM}''^2 &= x''^2 + y''^2, \end{aligned}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} \text{OM}'^2 &= x'^2 (1 + \delta^2), \\ \text{OM}''^2 &= x''^2 (1 + \delta^2); \end{aligned}\right.$$

et par suite

$$\text{OM}'^2 . \text{OM}''^2 = x'^2 x''^2 (1 + \delta^2)^2 \quad \text{ou} \quad \text{OM}' . \text{OM}'' = x'x'' (1 + \delta^2) \qquad (1).$$

Or, l'élimination de y entre les équations de la circonférence et de la sécante, donnant

$$(1 + \delta^2)\, x^2 - 2dx + (d^2 - R^2) = 0,$$

on en déduit

$$x'x'' = \frac{d^2 - R^2}{1 + \delta^2};$$

et, en substituant dans (1),

$$OM' \,.\, OM'' = d^2 - R^2 = constante. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRES I. *Deux cordes se coupent dans un cercle en parties réciproquement proportionnelles.*

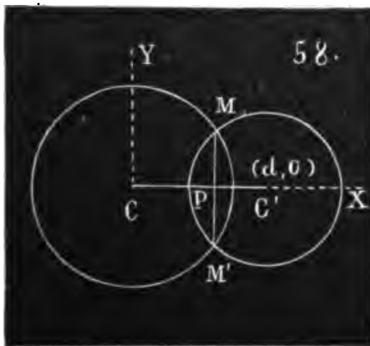
II. *Si d'un point, pris hors d'un cercle, on trace des sécantes terminées à la circonférence, les sécantes entières sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

III. *Si par un point, pris en dehors de la circonférence, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

SCOLIE. *Si d'un point extérieur à un cercle, on trace deux tangentes à cette ligne, elles seront égales depuis le point de départ jusqu'aux points de contact.*

THÉORÈME VII.

1° *Deux circonférences ne peuvent se couper en plus de deux points.* — 2° *Deux cercles se coupant, la distance des centres est normale à la corde des intersections et médiatrice de cette dernière; de plus, elle est moindre que la somme des rayons et plus grande que leur différence.* — 3° *Deux circonférences seront tangentes si la distance des centres vaut la somme* ou *la différence de leurs rayons.* — 4° *Deux circonférences n'auront aucun point commun si la distance des centres est plus grande que la somme de leurs rayons* ou *moindre que leur différence* (fig. 58).



Prenons la droite des centres comme axe des X, l'origine au centre C du plus grand cercle et les axes rectangulaires; nous aurons, en appelant R, R' et d les rayons et la distance des centres,

$$\text{(C)} \quad x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{et} \quad (x-d)^2 + y^2 = R'^2 \ldots\ldots \quad \text{(C')},$$

pour les deux circonférences.

De ces deux équations, on déduit, par voie de soustraction,

$$2dx - d^2 = R^2 - R'^2 \ldots\ldots \quad (1),$$

c'est-à-dire une perpendiculaire à la droite des centres. Donc (C) et (C') *ne pourront se couper en plus de deux points.*

De plus, (1) et (C) donnent, en éliminant x,

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{4d^2R^2 - (d^2 + R^2 - R'^2)^2};$$

d'où

$$MP = M'P.$$

Enfin, l'ordonnée y du point d'intersection pouvant s'écrire

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(2dR + R^2 + d^2 - R'^2)(2dR - d^2 - R^2 + R'^2)},$$

ou

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(d + R + R')(d + R - R')(R' + d - R)(R' + R - d)};$$

donc, d'après les indications ci-dessus, on a

$$d + R + R' > 0 \quad \text{et} \quad d + R - R' > 0,$$

les deux cercles ne se couperont que pour

$$R' + d - R > 0 \quad \textit{avec} \quad R + R' - d > 0,$$

ou

$$R' + d - R < 0 \quad \textit{avec} \quad R + R' - d < 0:$$

mais les dernières hypothèses sont inadmissibles, car leur combinaison, par addition, donne

$$2R' < 0.$$

Ainsi, il faut avoir

$$d - R + R' > 0 \quad \textit{avec} \quad R' + R - d > 0,$$

ou

$$d > R - R' \quad \textit{avec} \quad d < R + R'.$$

Le contact des deux circonférences exige que l'ordonnée du point M soit simple; donc, dans le cas des axes précités,

$$y = 0;$$

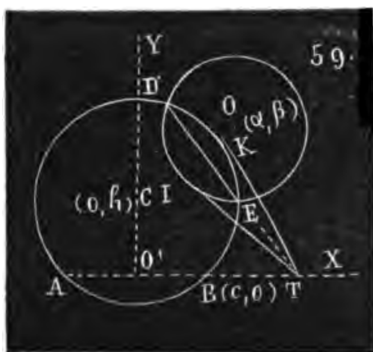
c'est-à-dire

$$\alpha = R + R' \quad \textit{ou} \quad \alpha = R - R'.$$

Enfin, les deux lieux n'ont aucun point commun, si y est *imaginaire* alors on a

$$\alpha > R + R' \quad \textit{ou} \quad \alpha < R - R'.$$

THÉORÈME VIII.



La corde d'intersection d'un cercle donné et d'un cercle variable passant par deux points fixes, coupe la droite de ces derniers points en un même point (fig. 59).

Soient O le cercle donné et C celui variable, passant par les points A et B; nous aurons, en appelant (α, β) les coordonnées de O, (o, h) celles de C, R et ρ les rayons des cercles O et C,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \qquad (O),$$

$$x^2 + (y - h)^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2hy = \rho^2 - h^2 = c^2 \qquad (C);$$

pour les équations de ces circonférences, rapportées à la corde AB = $2c$ et à sa médiatrice perpendiculaire.

La corde commune d'intersection sera

$$(C) - (O) \quad ou \quad 2(\beta - h)\,y + 2\alpha x + (R^2 - c^2 - \alpha^2 - \beta^2) = 0 \;\ldots\; (DE).$$

Or, en posant $y = 0$, on obtient

$$OT = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + c^2 - R^2}{2\alpha} = constante. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SCOLIE. Lorsque le cercle variable CAB devient tangent à la circonférence O, la sécante TED se transforme en l'une des tangentes TI ou TK ; et par suite ces points I et K seront les points de contact, avec le cercle O, des circonférences qui, tangentes à ce dernier, passeraient par les points A et B.

---

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

XXVIIe & XXVIIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

De la tangente à la circonférence. — Tangente par un point extérieur ; corde et circonférence des contacts. — Axe radical de deux circonférences. — Centre radical de trois cercles. — Tangente commune à deux cercles. — De la normale au cercle. — Applications sur la circonférence. — Exercices.

De la tangente à la circonférence.

110. En appliquant la théorie de la tangente, au cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \qquad (\varphi);$$

on obtient, pour la direction de cette droite,

$$\alpha = -\frac{x'}{y'},$$

et pour son équation

$$xx' + yy' = R^2 \qquad (T).$$

N. B. Si la circonférence avait pour équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos.\theta = R^2;$$

on aurait, pour la direction de la tangente au point (x', y'),

$$-\frac{2(x'-\alpha) + 2(y'-\beta)\cos.\theta}{2(y'-\beta) + 2(x'-\alpha)\cos.\theta} \quad \text{ou} \quad -\frac{(x'-\alpha) + (y'-\beta)\cos.\theta}{(y'-\beta) + (x'-\alpha)\cos.\theta},$$

et par suite pour la tangente

$$y - y' = -\frac{(x'-\alpha) + (y'-\beta)\cos.\theta}{(y'-\beta) + (x'-\alpha)\cos.\theta}(x-x')\,;$$

ou, en réduisant,

$$yy'+\cos\theta(xy'+yx')+xx'-(\beta+\alpha)(y+y')\cos\theta-(\alpha+\beta)\cos\theta(x+x')+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-R^2=0.$$

THÉORÈME.

Tous les points de (T), *à l'exception du point de contact* (x', y'), *sont extérieurs à* (φ).

En effet, la position du point (x', y') donne

$$x'^2 + y'^2 = R^2,$$

d'où, en combinant cette égalité, par voie de soustraction, avec $(T) \times 2$,

$$x'^2 - 2xx' + y'^2 - 2yy' = -R^2 \quad \text{ou} \quad (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = x^2 + y^2 - R^2.$$

Ainsi le premier membre de (φ) sera constamment *positif* pour un point (x, y) de la tangente, autre que celui de contact; donc, [§ 105 Théor. V] *tous les points de* (T), *à l'exception de* (x', y'), *sont extérieurs à* (T).

Tangente au cercle par un point extérieur.

111. Soit (x'', y'') le point donné et (x', y') celui du contact inconnu; nous aurons, pour cette tangente,

$$xx' + yy' = R^2;$$

et, comme cette droite doit passer par le point (x'', y''),

$$x''x' + y''y' = R^2 \qquad (1).$$

De plus, la situation du point (x', y') donne

$$x'^2 + y'^2 = R^2 \qquad (2);$$

donc les relations (1) et (2) déterminent x' et y'. Or, les valeurs de ces inconnues, contiennent

$$\sqrt{x''^2 + y''^2 - R^2};$$

et par suite, on pourra tracer du point (x'', y'') *deux*, *une* ou *zéro* tangente suivant que (x'', y'') sera *extérieur, sur* ou *intérieur* à (φ), puisque alors on a

$$x''^2 + y''^2 - R^2 \gtreqless 0.$$

CORDE DES CONTACTS. Mais il est préférable de substituer à la résolution de (1) et (2), des constructions géométriques résultant spontanément de ces mêmes

équations considérées comme fonction des variables x' et y' ; alors (2) n'est que le cercle proposé, tandis que (1) est une droite, déjà nommée [§ 26] *corde des contacts*, pour laquelle (fig. 60)

$$\left.\begin{array}{l} y'=0, \\ x'=0, \end{array}\right\} \text{ donnent } \left\{\begin{array}{l} x'=\dfrac{R^2}{x''}=OT, \\ y'=\dfrac{R^2}{y''}=OT'; \end{array}\right.$$

et par suite cette ligne TT' détermine les tangentes $[(x'', y''), (x', y')]$ et $[(x'', y''), (x', y')]$.

La droite

$$x'=\frac{R^2}{x''}$$

étant indépendante de y'', le point T sera *constant* pour chaque couple de tangentes tracé d'un point appartenant à cette droite DD', qui est ainsi LA POLAIRE avec T pour PÔLE. De même

$$\left(0, \frac{R^2}{y''}\right) \quad \text{et} \quad y'=\frac{R^2}{y''}$$

sont *pôle* et *polaire*.

CIRCONFÉRENCE DES CONTACTS. Les points communs à (1) et (2) sont encore donnés par les relations

$$x'^2+y'^2=R^2 \quad \text{et} \quad \left(x'-\frac{x''}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{y''}{2}\right)^2=\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{4}.$$

La dernière s'obtient en combinant (1) et (2) par voie de soustraction et en complétant ensuite les carrés : or, c'est une circonférence ayant *pour centre* et *pour rayon*

$$\left[\frac{x''}{2}, \frac{y''}{2}\right] \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{4}};$$

c'est-à-dire la construction indiquée dans tous les traités de géométrie élémentaire.

N. B. Le lecteur trouvera facilement que

$$y=mx+n,$$

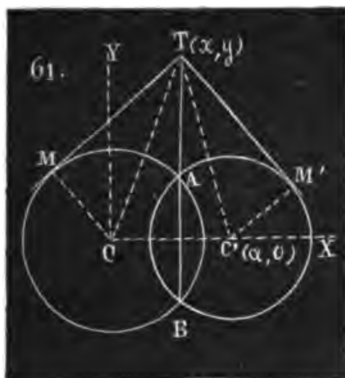
sera tangente à la circonférence

$$x^2+y^2=R^2;$$

pour

$$n=\pm R\sqrt{m^2+1}.$$

Axe radical de deux circonférences.



On désigne sous ce nom : LE LIEU DES POINTS DE DÉPART DES TANGENTES ÉGALES MENÉES A DEUX CERCLES.

Un dispositif convenable d'axes coordonnés, nous permet de prendre (fig. 61)

C) $x^2+y^2=R^2$ et $(x-\alpha)^2+y^2=R'^2$... (C'

pour les équations des deux circonférences.

Maintenant, T étant un point du lieu, on doit avoir

$$TM = TM' \quad \text{ou} \quad \sqrt{CT^2-R^2} = \sqrt{CT'^2-R'^2};$$

et par suite, (x, y) étant les coordonnées du point T,

$$x^2 + y^2 - R^2 = (x-\alpha)^2 + y^2 - R'^2;$$

c'est-à-dire

$$2\alpha x = R^2 + \alpha^2 - R'^2 \qquad (\psi).$$

Ainsi le lieu demandé est rectiligne et n'est autre que *la corde d'intersection des deux circonférences,* quand elles se coupent, puisque

$$(\psi) = (C) - (C').$$

COROLLAIRE. *Les axes radicaux de trois circonférences concourent en un même point,* nommé CENTRE RADICAL.

En effet, soient les trois circonférences

$$(C) = 0, \quad (C') = 0 \quad \text{et} \quad (C'') = 0;$$

nous aurons

$$(C) - (C') = 0, \quad (C) - (C'') = 0 \quad \text{et} \quad (C') - (C'') = 0$$

pour les trois axes radicaux.

Or

$$[(C) - (C')] = [(C) - (C'')] - [(C') - (C'')]. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

SCOLIE. Pour construire l'axe radical de deux cercles ne se coupant pas, on tracera une circonférence auxiliaire rencontrant les deux proposées, et par le *centre radical* de ces trois cercles on abaissera une perpendiculaire sur la droite des centres des deux circonférences données, ce sera *leur axe radical.*

Tangente commune à deux circonférences.

113. Prenons pour axe des X la droite des centres, l'origine au centre C du plus grand cercle et les coordonnées rectangulaires; nous aurons (fig. 62), pour les deux courbes,

C) $x^2 + y^2 = R^2$ et $(x-\alpha)^2 + y^2 = R'^2$ (C'.

Ceci posé, soit

$$y = a(x - d) \ldots . (TM) \text{ ou } (T'N')$$

la tangente commune.

En éliminant y entre (TM) et (C), on obtient

$$(a^2 + 1)x^2 - 2a^2dx + (a^2d^2 - R^2) = 0;$$

d'où, pour l'équation de condition de tangence pour ces lignes,

$$(d^2 - R^2)a^2 = R^2 \qquad (1).$$

De même, (C') et (TM) donnent

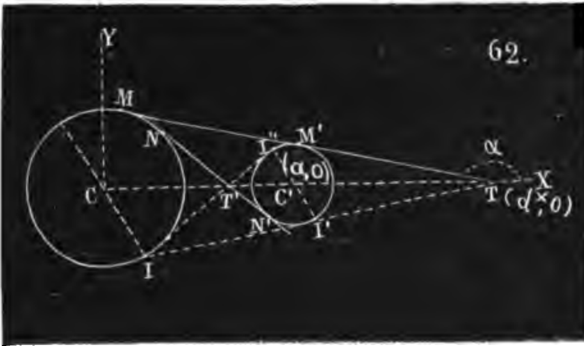
$$(a^2 + 1)x^2 - 2(\alpha + da^2)x + (\alpha^2 + a^2d^2 - R'^2) = 0,$$

et par suite, pour la fonction analogue à (1),

$$[(d - \alpha)^2 - R'^2]a^2 = R'^2 \qquad (2).$$

Enfin, des équations (1) et (2), on déduit

$$(d) \qquad d = \frac{\alpha R}{R \mp R'} \quad \text{et} \quad a = \frac{R \mp R'}{\pm\sqrt{(\alpha + R \mp R')(\alpha - R \pm R')}} \qquad (a.$$



DISCUSSION. La première valeur de d, est supérieure à α, et elle se construit élégamment en traçant deux rayons CI et C'I' parallèles et dirigés dans le même sens, la sécante II' des extrémités coupera CC' au pied T des tangentes communes extérieures. Quant à la seconde valeur de d, elle est moindre que α et donnera un point T' sur CC', déterminé par une sécante II'', dont les extrémités I et I'' sont celles de deux rayons parallèles CI et C'I'', mais tournés en sens contraires.

Maintenant considérons l'expression de la direction a, qui peut admettre *quatre* valeurs; et par suite le problème peut donner quatre solutions : d'abord *la réalité* de a ne peut dépendre du facteur $\alpha + R \mp R'$ qui est positif, d'après les coordonnées admises; ainsi tout se réduit à examiner la valeur de $\alpha - R \pm R'$, suivant les diverses positions des deux circonférences.

1° (C) et (C) EXTÉRIEURS. Dans ce cas, on a

$$\alpha > R + R'$$

donc

$$\alpha - R - R' > 0 \quad \text{et à fortiori} \quad \alpha - R + R' > 0.$$

Ainsi QUATRE TANGENTES.

2° (C) et (C') TANGENTS EXTÉRIEUREMENT. Ici

$$\alpha = R + R' \quad \text{ou} \quad \alpha - R - R' = 0;$$

et par suite, pour les valeurs de a,

$$a'' = \frac{R - R'}{0} = \infty \quad \text{et} \quad a' = \frac{R - R'}{+ 2\sqrt{RR'}};$$

c'est-à-dire TROIS TANGENTES.

3° (C) et (C') SÉCANTS. Alors

$$\alpha < R + R' \quad \text{et} \quad \alpha > R - R',$$

ou

$$\alpha - (R + R') < 0 \quad \text{et} \quad \alpha - (R - R') > 0;$$

c'est-à dire que

a' est *réelle*, mais a'' est *imaginaire*.

Donc DEUX TANGENTES.

4° (C) et (C') TANGENTS INTÉRIEUREMENT : $\alpha = R - R'$ donne

$a' = \infty$ mais a'' *imaginaire;*

et par suite UNE SEULE TANGENTE.

5° (C) et (C') INTÉRIEURES : Dans ce cas

$$\alpha < R - R',$$

donne a' et a'' IMAGINAIRES. Donc AUCUNE TANGENTE.

De la normale au cercle.

114. La normale au point (x', y') de la circonférence, a pour expression

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'),$$

puisque les axes sont rectangulaires ; ou, en réduisant,

$$y = \frac{y'}{x'} x \;\ldots\; (N).$$

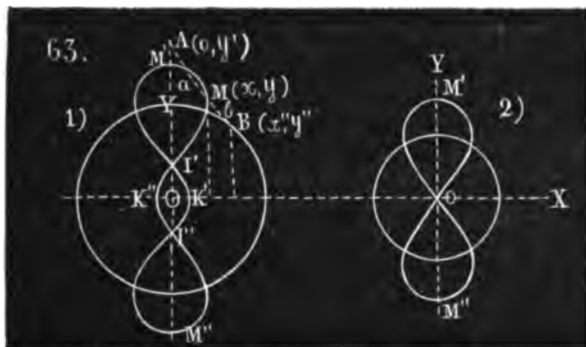
Ainsi, *la normale du cercle est un rayon*, propriété déjà établie en géométrie élémentaire.

Applications sur le cercle.

115. Voici quelques applications complétement développées.

PROBLÈME I.

Quel est le lieu décrit par un point M d'une droite AB = l, dont les extrémités glissent sur une circonférence O et sur un de ses diamètres OY (fig. 63)?



Prenons le diamètre OY pour axe des Y et sa médiatrice perpendiculaire pour axe des abscises.

Ceci posé, soient a et b les segments AM et MB de AB $= l$, $(o,\ y')$ et $(x'',\ y'')$ les coordonnées des points variables A et B ; nous aurons d'abord les génératrices rectilignes

$$\left.\begin{array}{l} a : b :: x : x'' - x, \\ a : b :: y' - y : y - y''; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{ll} (a+b)\,x = ax'' \ \ldots.. & (G), \\ (a+b)\,y = ay'' + by' & (G'); \end{array}\right.$$

et la génératrice circulaire

$$x^2 + (y - y')^2 = a^2 \qquad (G'').$$

D'un autre côté, l'équation de condition est

$$x''^2 + y''^2 = R^2 \qquad (1);$$

car le point $(x'',\ y'')$ est situé sur la circonférence

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (D).$$

Donc, en éliminant x'', y'' et y' entre (G), (G'), (G'') et (1), on obtiendra l'équation du lieu demandé. Or, (G) combinée avec (1), donne

$$x'')\quad x'' = \frac{(a+b)\,x}{a} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{1}{a}\sqrt{a^2R^2 - (a+b)^2x^2} \quad (y'';$$

d'un autre côté, de (G'), on déduit

$$y - y' = \frac{a\,(y'' - y)}{b};$$

et, par suite, pour (G'')

$$b^2x^2 + a^2\,(y'' - y)^2 = a^2b^2;$$

d'où, en remplaçant y'' par sa valeur,

$$b^2x^2 + a^2\left[-y + \frac{1}{a}\sqrt{a^2R^2 - (a+b)^2x^2}\right]^2 = a^2b^2;$$

et, en faisant disparaître le radical,

$$a^2y^4 \begin{array}{l|} +2(a+b)^2 \\ +2b^2 \end{array}\ x^2y^2 + (a+2b)^2x^4 \begin{array}{l|} -2a(a+2b)R^2 \\ +2a(a+2b)b^2 \end{array}\ x^2 \begin{array}{l|} -2a^2R^2 \\ -2a^2b^2 \end{array}\ y^2 + a^2(R^2 - b^2)^2 = 0 \ldots(\varphi)$$

Ce lieu du 4me degré, a pour centre et pour axes de symétrie, l'origine et les axes coordonnés; de plus, on obtient, pour les ordonnées à l'origine,

$$x = 0,\ y^4 - 2\,(R^2 + b^2)\,y^2 + (R^2 - b^2)^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad y = \pm\,(R \pm b);$$

c'est-à-dire les points M′ et M″ d'une part, I′ et I″ d'autre part : points distants de b de la circonférence.

Les intersections avec l'axe des X sont données par

$$y = 0,\ (a + 2b)^2\,x^4 - 2a\,(a + 2b)\,(R^2 - b^2)\,x^2 + a^2\,(R^2 - b^2) = 0;$$

d'où, on déduit

$$x = \pm\sqrt{\frac{a\,(R^2 - b^2)}{a + 2b}};$$

c'est-à-dire que sur cet axe, il n'existe que *deux* points symétriques K′ et K″ par rapport au centre O, si toutefois on a

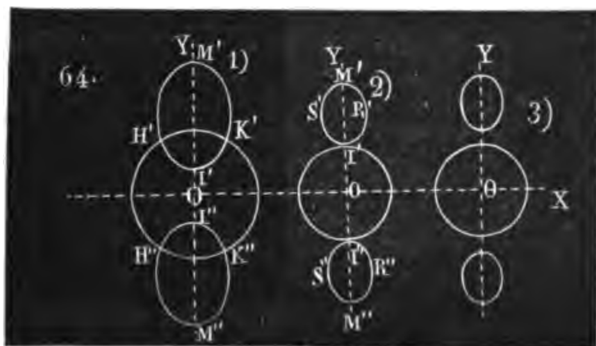
$$b < R,$$

ce qui correspond à la figure 63, 1).

Si maintenant nous supposons

$$b = R;$$

la partie moyenne de la courbe, c'est-à-dire I′K′I″K″ se réduit au centre O et le lieu se transforme en *une espèce de huit* [fig. 63, 2)].



Dans le cas de

$$R < b < 2R,$$

le lieu ne rencontre plus l'axe des X et se compose des deux courbes I′K′M′H′ et I″K″M″H″, sécantes [fig. 64, 1)] au cercle donné. Lorsque

$$b = 2R,$$

(φ) est formé des deux parties M′R′I′S′ et M″R″I″S″ tangentes à la circonférence O aux extrémités du diamètre OY [fig. 64, 2)].

Enfin pour

$$b > 2R,$$

on obtient la figure 64, 3), c'est-à-dire un lieu n'ayant aucune intersection avec le cercle directeur.

N. B. Nous engageons le lecteur à rechercher quel est l'angle formé par les tangentes aux points d'intersection de (φ) avec le cercle O.

PROBLÈME II.

Déterminer le lieu du point dont la somme des carrés des distances à des points donnés, soit constante.

Soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''),..... les points donnés et (x, y) les coordonnées d'un des

points du lieu demandé; nous aurons, en supposant les axes rectangulaires,

$$[(x-x')^2+(y-y')^2]+[(x-x'')^2+(y-y'')^2]+[(x-x''')^2+(y-y''')^2]+\ldots\ldots=K^2,$$

d'où, en développant et divisant par le nombre de points,

$$x^2-2.\frac{x'+x''+x'''+.}{n}x+y^2-2\frac{y'+y''+y'''+.}{n}y=\frac{K^2-(x'^2+x''^2+.)-(y'^2+y''^2+.)}{n};$$

et par suite, en complétant les carrés,

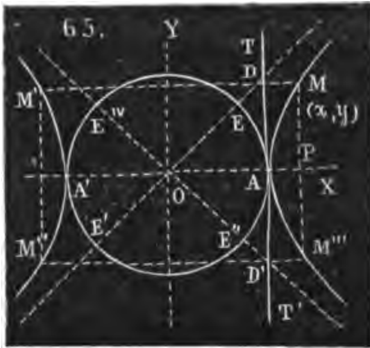
$$\left\{x-\frac{x'+x''+x'''+\ldots}{n}\right\}^2+\left\{y-\frac{y'+y''+y'''+\ldots}{n}\right\}^2=constante.$$

Ainsi *le lieu est une circonférence de cercle pouvant se réduire à son centre* ou *être imaginaire*.

PROBLÈME III.

Quel est le lieu du point dont la distance à une tangente fixe d'un cercle donné, soit égale à la séparation du pied de cette distance à la circonférence de ce cercle (fig. 65).

Soit O le centre du cercle donné de rayon R et TT' la tangente fixe.



D'abord les extrémités A et A' du diamètre de contact, sont des points du lieu; et cela en vertu de ce que la distance d'un point à une circonférence est double, comme se mesurant sur le diamètre passant par ce point.

La construction d'un point quelconque s'effectuera en traçant une sécante diamétrale E'OED, terminée à la tangente TT', puis prenant DM = DE et DM' = DE' sur une perpendiculaire à TT'; on aura deux points M et M' du lieu : cette génération du point M indique déjà que OY est un axe de symétrie; aussi prendrons-nous cette droite comme axe des ordonnées et le diamètre perpendiculaire comme ligne des abscisses.

Si maintenant nous considérons les arcs égaux AE et AE'', mais dirigés en sens contraires, nous aurons les points M'' et M''' symétriques de M' et M par rapport au diamètre A'OA qui est aussi un second axe de la courbe. Ce diamètre est l'axe des X.

Enfin, la sécante normale au diamètre A'OA, étant parallèle à la tangente TT', on en déduit que le lieu doit être infini, tant au-dessus qu'au-dessous de OX, à droite et à gauche de OY. Donc, si le lieu est du second degré, il ne peut appartenir qu'au genre hyperbolique.

Ceci posé, procédons analytiquement : pour le point M ou M', nous avons

$$PM^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = DA^2 = DE\,.\,DE' \qquad (1).$$

Mais, pour le point M,

$$DM = DE = AP = x - R \quad \text{et} \quad DE' = DE + 2R = x + R;$$

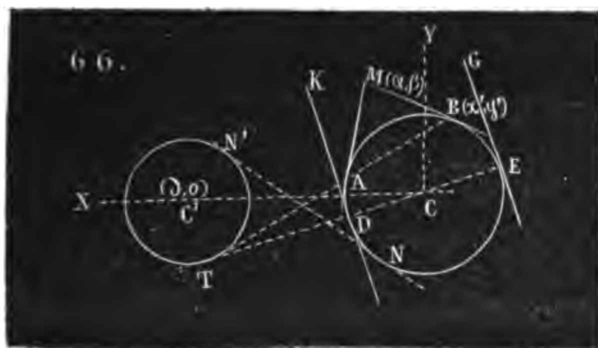
et par suite (1) devient

$$y^2 = (x - R)(x + R) \quad \text{ou} \quad y^2 - x^2 = -R^2 \quad (7).$$

On obtiendrait la même fonction pour le point M'. Donc, *le lieu est une hyperbole équilatère, ayant pour asymptotes les bissectrices des angles formés par les axes coordonnés, et dont 2R représente les axes de symétrie.*

PROBLÈME IV.

Déterminer le lieu du sommet d'un angle dont les côtés tangents à une circonférence (C), déterminent une corde des contacts tangente à une autre circonférence (C') [fig. 66.].



D'abord un point quelconque sera construit en traçant TAB tangente à (C') et le point M de concours des tangentes menées à (C) par les intersections de TAB sera un point du lieu.

Les tangentes à (C') passant par le centre C donneront deux génératrices parallèles EG et DK ; c'est-à-dire que dans le sens de ces droites la courbe s'étend à l'infini, et il y aura deux de ces sens si le centre C est extérieur au cercle (C').

Enfin des tangentes communes aux deux circonférences, on déduirait les intersections, tel que N, du lieu avec le cercle (C); et évidemment on aurait *quatre* points si (C) et (C') étaient extérieurs.

Ceci posé, prenons la droite des centres comme axe des X et sa perpendiculaire par le centre C pour celui des Y; nous aurons, d étant la distance CC', R et R' les rayons,

$$(C) \qquad x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{et} \quad (x-d)^2 + y^2 = R'^2 \qquad (C'),$$

pour les équations des deux cercles directeurs.

Mais la tangente MB au point B (x', y') quelconque de (C), ayant pour équation

$$xx' + yy' = R^2,$$

on aura, de ce qu'elle passe par le point (α, β),

$$\alpha x' + \beta y' = R^2;$$

et par suite *la corde* AB *des contacts* sera

$$\alpha x + \beta y - R^2 = 0.$$

Or, la distance de cette droite au centre C' (d, o), est

$$R' \quad \text{et} \quad \frac{\alpha d - R^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

puisque cette droite AB doit être tangente à (C'); donc

$$R' = \frac{\alpha d - R^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

ou

$$R'^2\beta^2 + (R'^2 - d^2)\,\alpha^2 + 2dR^2\alpha - R^4 = 0 \qquad (\varphi).$$

Ainsi le lieu sera *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique* suivant que l'on aura

$$d \lesseqgtr R',$$

c'est-à-dire pour le centre C *intérieur*, *sur* ou *extérieur* au cercle (C').

REMARQUE I. L'équation (φ) indique suffisamment que la droite des centres est un axe de symétrie du lieu.

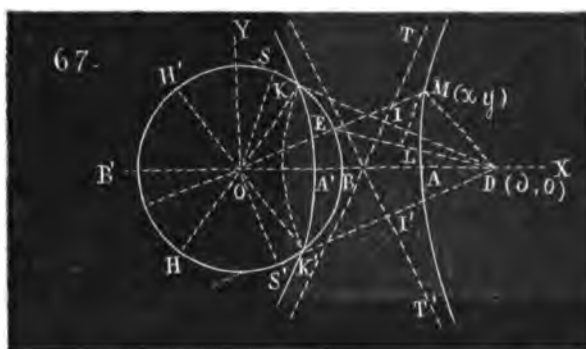
II. Lorsque $d = o$, (φ) devient

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{R^4}{R'^2},$$

ou *une circonférence concentrique* aux directrices et dont le rayon est une troisième proportionnelle à R' et R.

PROBLEME V.

Quel est le lieu du point à égale distance d'un point et d'une circonférence donnés (fig. 67).



Soient D le point directeur et (O) le cercle donné ayant R pour rayon.

D'abord les points A et A' milieux des distances DB et DB' du point D à la circonférence, sont déjà situés sur le lieu cherché. Ensuite la circonférence ayant son centre en D et pour rayon 2R coupera le cercle (O) en deux points K et K' appartenant à la ligne demandée; car DK = KH et DK' = K'H'.

Pour obtenir un point quelconque M, on joindra D à un point E de (O) et le rayon OE coupera la médiatrice normale de DE en ce point M; car MD = ME. Cette construction indique que les tangentes DS et DS' donneront deux rayons OS et OS' parallèles aux perpendiculaires élevées aux droites DS et DS' par leurs milieux; donc, dans ces deux directions le lieu est infini et appartiendra au genre hyperbolique, si toutefois il est du second ordre.

Ceci posé, prenons OD pour axe des X et sa perpendiculaire OY pour second axe des coordonnées; nous aurons, pour le point M,

$$(1) \qquad MD = ME = MO - R \quad \text{ou} \quad MD = MO + R \qquad (1;$$

suivant que la distance du point M à la circonférence sera celle MINIMUM ou MAXIMUM.

Or, en appelant d la distance OD, on a

$$MO = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad MD = \sqrt{(x-d)^2 + y^2},$$

d'où, en condensant les relations (1),

$$-\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = \mp R;$$

et par suite, en faisant disparaître successivement les radicaux,

$$4R^2y^2 - 4(d^2 - R^2)x^2 - 4d(R^2 - d^2)x - (R^2 - d^2)^2 = 0 \qquad (\varphi).$$

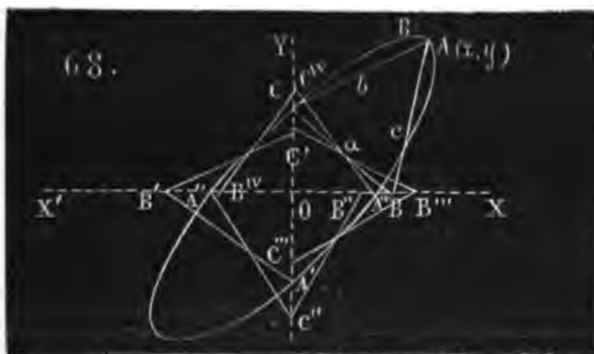
Ainsi, *le lieu est une courbe du second ordre :* HYPERBOLIQUE OU ELLIPTIQUE SUIVANT QUE D EST EXTÉRIEUR OU INTÉRIEUR A (O); et se réduisant A DEUX DROITES CONFONDUES AVEC OD, *pour* D *situé sur la circonférence ;* car $d = R$ donne

$$y^2 = 0;$$

c'est-à-dire une variété du genre parabolique.

PROBLÈME VI.

Trouver le lieu du sommet A d'un triangle CAB, dont les deux autres C *et* B glissent sur deux axes rectangulaires OX *et* OY (fig. 68).



D'abord lorsque le triangle CAB occupera la position C'A'B', c'est-à-dire CA coïncidant avec OY, on aura le point A' d'intersection du lieu avec YY'; puis CAB en C''A''B'', ou AB sur XX', le point de rencontre A'' avec cette droite sera déterminé. De même, les stations C'''A'''B''' et C^{IV}A^{IV}B^{IV} fournissent les points A''' et A^{IV} respectivement symétriques de A' et A'' par rapport à l'origine O.

Il résulte déjà de ce qui précède que le lieu sera limité et aura pour centre le point O.

Ceci posé, prenons les droites données pour axes et désignons par β et γ les coordonnées à l'origine du côté BC ; nous aurons

$$\beta^2 + \gamma^2 = a^2 \qquad (1),$$

pour équation de condition entre ces deux constantes variables et le côté connu a; et comme les génératrices du point A sont des circonférences ayant pour centres variables C et B et pour rayons b et c, on obtient

$$\text{G)} \quad x^2 + (y - \gamma)^2 = b^2 \quad \text{et} \quad y^2 + (x - \beta)^2 = c^2 \qquad \text{(G}'.$$

Donc, l'élimination de β et γ entre (1), (G) et (G') donnera l'expression analytique du lieu demandé.

Or, (G) et (G') donnent

$$\gamma = y - \sqrt{b^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \beta = x - \sqrt{c^2 - y^2},$$

et, en remplaçant dans (1),

$$(x - \sqrt{c^2 - y^2})^2 + (y - \sqrt{b^2 - x^2})^2 = a^2;$$

d'où, après développement, réduction et transpositions convenables,

$$2\,[x\sqrt{c^2 - y^2} + y\sqrt{b^2 - x^2}] = b^2 + c^2 - a^2.$$

Mais

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A,$$

donc

$$x\sqrt{c^2 - y^2} + y\sqrt{b^2 - x^2} = bc \cos. A.$$

La disparition des radicaux élèverait cette dernière fonction au 4me degré : mais chaque radical n'affectant qu'une variable, isolons le second, par exemple, et élevons au carré; il vient

$$c^2x^2 = b^2c^2 \cos^2. A + b^2y^2 + 2bc \cos. A\sqrt{b^2 - x^2}.\ y;$$

d'où, en résolvant par rapport à y,

$$y = \frac{-c \cos. A\sqrt{b^2 - x^2} \pm \sqrt{c^2x^2 - c^2x^2 \cos.^2 A}}{b},$$

ou

$$y = \frac{-c \cos. A\sqrt{b^2 - x^2} \pm cx \sin. A}{b};$$

et par suite

$$b^2y^2 \mp 2bc \sin. A.\ xy + c^2x^2 = b^2c^2 \cos.^2 A \qquad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu est double et admet pour centre le point* O *de concours des droites* XX′ *et* YY′.

DISCUSSION : 1° $A \gtrless 90°$; le lieu est elliptique et cela quelque soit le rapport de b à c.

2° $A = 90°$; (φ) devient

$$b^2y^2 \mp 2bc.\ xy + c^2x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad by \mp cx = 0 \qquad (\varphi');$$

c'est-à-dire *deux droites passant par l'origine.*

Ce lieu (φ') n'est cependant point une variété du cas général (φ); de plus, il paraît plus étendu que celui demandé; toutefois cette extension disparaît en observant que (φ') ne dépend que du rapport $c : b = \rho$, car il est alors

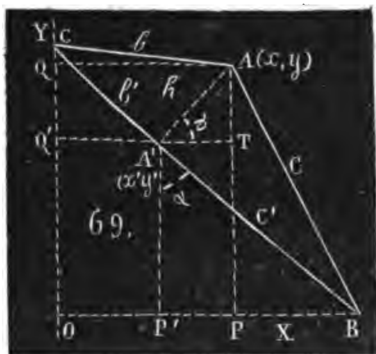
$$y = \rho.\ x.$$

Donc, *cette double droite* (φ') *serait le lieu du sommet de l'angle droit de triangles rectangles semblables, dont les autres sommets glisseraient sur* OX *et* OY.

Ainsi l'analyse et la synthèse sont encore ici en concordance, quoique cela ne soit pas toujours.

3° Enfin, si pour $A = 90°$, on a encore $b = c$; (φ') devient

$$y = \pm x;$$



c'est-à-dire les bissectrices des angles YOX et Y′OX′.

SECONDE SOLUTION. Ce second mode de détermination, a le double avantage d'éviter les radicaux et de montrer l'utilité de l'emploi des transformations de coordonnées, pour résoudre des questions qui dépendent d'autres bien connues (figure 69).

Désignons par b' et c' les projections de b et c sur le troisième côté a; nous savons que le lieu décrit par la projection A′ du sommet A, est une

ellipse ayant pour équation, par rapport aux axes coordonnés supposés,

$$c'^2y'^2 + b'^2x'^2 = c'^2b'^2 \qquad (1').$$

Il est évident que cela revient à déterminer les coordonnées (y', x') du point A' en fonction de celles (x, y) du sommet A, pour $A'A = h$ et perpendiculaire au côté BC.

Or, nous avons

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{OP} = x' + \mathrm{A'T} = x' + h \cos.\,\alpha, \\ y &= \mathrm{AP} = y' + \mathrm{AT} = y' + h \sin.\,\alpha; \end{aligned}\right\} \text{ mais } \left\{\begin{aligned} \cos.\,\alpha &= \frac{y'}{c'}, \\ \sin.\,\alpha &= \frac{x'}{b'}; \end{aligned}\right.$$

donc

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + \frac{h}{c'}\,y', \\ y &= y' + \frac{h}{b'}\,x'; \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{b'\,(c'x - hy)}{b'c' - h^2}, \\ y' &= \frac{c'\,(b'y - hx)}{b'c' - h^2}; \end{aligned}\right.$$

et par suite (1') devient, après développement et réduction,

$$(b'^2 + h^2)\,y^2 - 2\,(b' + c')\,hxy + (c'^2 + h^2)\,x^2 = (b'c' - h^2) \qquad (1'').$$

Mais on a

$$b'^2 + h^2 = b^2, \quad c'^2 + c^2 = h^2, \quad (b' + c')\,h = ah = bc \sin.\,\mathrm{A},$$

ainsi que

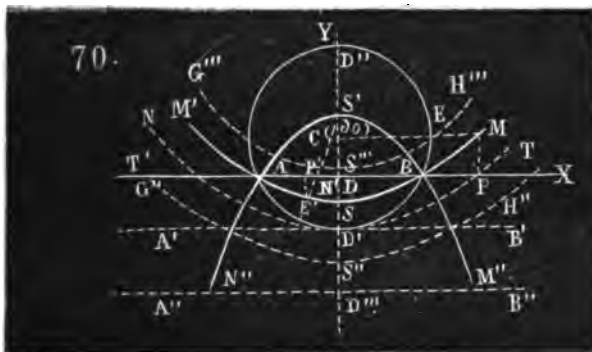
$$a^2 = (b' + c')^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos.\,\mathrm{A} \text{ donnant } b'c' - h^2 = -\,bc \cos.\,\mathrm{A};$$

et par suite (1') se transforme en

$$b^2y^2 - 2bc \sin.\,\mathrm{A}.\,xy + c^2x^2 = b^2c^2 \cos.^2\,\mathrm{A}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

PROBLÈME VII.

Construire le lieu du centre d'un cercle tangent à une droite et à une circonférence données, ou le lieu des points à égale distance d'une droite et d'une circonférence tracées.



Nous supposerons la droite sécante et distante de d du centre C.

D'abord les intersections A et B des deux directrices sont des points du lieu; et ces points se réunissent en D' lorsque la droite est tangente à la circonférence.

Ensuite, dans le cas de AB sécante, S et S' mi-

lieux de DD′ et DD″ seront encore des points de la ligne demandée; mais lorsque AB tendera vers A′B′, S′ s'approchera du centre C et S de D′; à la limite S′ sera en C, S en D′, et ce dernier pourra être regardé comme le résultat de la superposition des trois points A, B et S.

Quant à la position de AB en A″B″, extérieure au cercle, le point C arrive en S‴ centre de D‴D″ et D′ en S″ milieu de D‴D′.

Enfin, il est facile de reconnaître que les points seront deux à deux symétriques par rapport à D′D″, qui sera ainsi un axe de symétrie et que nous prendrons pour ligne des ordonnées, tandis que AB sera celle des X.

Ceci posé, nous avons, pour un point M *extérieur* à la circonférence,

$$\text{MP} = \text{ME} \quad \text{ou} \quad \text{MC} - \text{MP} = \text{R} \qquad (1),$$

et

$$\text{N'P'} = \text{N'E'} \quad \text{ou} \quad \text{N'C} + \text{N'P'} = \text{R} \qquad (1'),$$

pour une station *intérieure*.

Or,

$$\text{MP} \quad \text{ou} \quad \text{N'P'} = y \quad \text{et} \quad \text{MC} \quad \text{ou} \quad \text{N'C} = \sqrt{x^2 + (y-d)^2};$$

donc (1) et (1′) deviennent

$$\sqrt{x^2 + (y-d)^2} - y = \text{R} \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + (y-d)^2} + y = \text{R};$$

d'où, transposant, élevant au carré et réduisant,

$$(\varphi) \quad x^2 - 2(\text{R}+d)\,y + (d^2 - \text{R}^2) = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 2(d - \text{R})\,y + (d^2 - \text{R}^2) = 0 \quad (\varphi').$$

Ainsi le lieu est *une double parabole, ayant pour axe de symétrie celui des* Y.

DISCUSSION. 1° AB *est sécante :* donc $d < \text{R}$ et (φ) a pour sommet

$$\left[0, -\frac{\text{R}-d}{2}\right],$$

c'est-à-dire le point S et la ligne M′ASBM est le lieu (φ).

(φ') qui a son sommet au point

$$\left[0, \frac{d+\text{R}}{2}\right],$$

ou en S′, est caractérisée par la courbe N″AS′BM″.

2° AB est *tangente* et se confond avec A′B′; $d = \text{R}$. Alors (φ) est

$$x^2 = 4\text{R}y$$

analytiquement et *géométriquement* ND′T; tandis que (φ) qui se réduit à

$$x^2 = 0,$$

donne la double droite OY, *comme transformée* de N″AS′BM″.

3° Enfin, la droite occupe la position *extérieure* A″B″ et $d > \text{R}$ donne S″ $\left[0, \frac{d-\text{R}}{2}\right]$

pour sommet à (φ) qui est alors $G''S''H''$; et (φ') donne la parabole $G'''S'''H'''$ ayant S''' pour sommet ou

$$\left[0, \frac{d+R}{2}\right].$$

N. B. Des théories ultérieures nous ferons voir que lorsque la parabole est double, *le sommet de l'une est le foyer de l'autre.*

Exercices.

116. Voici quelques questions que le lecteur est prié de développer.

1° Quel est le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont toujours tangents à une circonférence donnée?

2° Quel est le lieu du point M? sachant que A, B, C, a, b, c étant les sommets et les côtés d'un triangle, on doit avoir

$$AM^2 \times a + BM^2 \times b + CM^2 \times c = \textit{constante}.$$

3° Quel est le lieu du point également éclairé par deux lumières dont les intensités sont a et b à l'unité de distance? *(On admettra ce principe de physique que les intensités d'une même lumière à des distances différentes, sont en raison inverse des carrés de ces distances.)*

4° Étant données quatre droites, formant trois à trois, quatre triangles : les quatre points de concours des hauteurs de ces triangles sont en ligne droite.

5° Trouver l'équation de la circonférence passant par trois points donnés.

6° Les côtés d'un angle droit BAC passent par deux points fixes A et B. Quel est le lieu de l'intersection du côté AC, avec la médiane de la base BC du triangle formé par BA, BC et la perpendiculaire CD à la droite BC?

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'ELLIPSE.

XXIXe LEÇON.

SOMMAIRE.

Formes diverses de l'équation de l'ellipse. — Théorème : Les carrés des ordonnées de l'ellipse, perpendiculaires à l'un des axes, sont entre eux comme les produits des segments qu'elles déterminent sur cet axe. — Description de l'ellipse : pointillée; continue; déduite de la projection d'un cercle. — Des foyers et des directrices. — Théorème I. Un point est extérieur *ou* intérieur à une ellipse suivant que la somme de ses distances au foyer est plus grande *ou* moindre que le grand axe de la courbe. — Théorème II. Le demi petit axe de l'ellipse est moyen proportionnel entre les deux segments que détermine chaque foyer sur le grand axe. — Problème. Quel est le lieu du point dont la somme des distances à deux points fixes est constante et égale à $2a$. — Description de l'ellipse au moyen des foyers. — Problème général. Déterminer le lieu du point dont le rapport des distances à un point et à une droite donnés soit constant ou :: $m : n$.

117. L'ellipse rapportée à ses axes, ayant pour équation

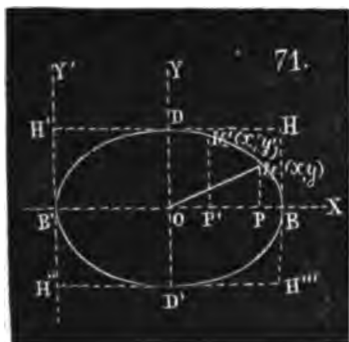
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (E),$$

on en déduit

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1);$$

et par suite de

$$\left.\begin{aligned} y &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ on obtient } \left\{\begin{aligned} x &= \pm a, \\ y &= \pm b; \end{aligned}\right.$$



c'est-à-dire les intersections de la courbe avec les axes coordonnés, et ici les points les plus éloignés et les moins distants du centre de la ligne : en effet, pour un point M quelconque on a (fig. 71)

$$OM^2 = x^2 + y^2,$$

d'où, en remplaçant y en fonction de x,

$$OM^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + b^2.$$

Or, en supposant $a > b$, ce qui est permis, il vient

$$\left.\begin{array}{l} \textit{maximum}\ \ OM = \pm a, \\ \textit{minimum}\ \ OM = \pm b, \end{array}\right\} \text{donné par} \left\{\begin{array}{l} x = \pm a, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Enfin, comme pour toute valeur de x, (E) donne pour y deux valeurs égales et de signes contraires, il en résulte que *le grand axe de la courbe la divise en deux parties égales.*

L'ellipse a également le petit axe pour droite de symétrie; de plus ce lieu, évidemment tangent aux côtés du rectangle HH'H''H''' aux points B, D, B' et D', a pour forme celle indiquée dans la figure, car la distance OM doit diminuer de OB à OD pour croître ensuite de OD à OB', et la portion B'D'B est symétrique de B'DB par rapport à B'B.

REMARQUE. Les points B, B', D et D' sont désignés sous le nom de *sommets* de la courbe.

N. B. On peut calculer les coordonnées de tous les points de la courbe, sans extraire une seule racine carrée, et cela au moyen d'une *variable auxiliaire.*

En effet,

$$x = \pm a . \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad y = \pm b . \frac{2t}{1 + t^2}$$

vérifient (E), indépendamment de toute valeur donnée à t; et en faisant croître t de 0 à 1, x variera de a à 0 et y de 0 à b.

118. En changeant x en $x - a$, dans (E), on obtient

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) \qquad (E_1)$$

pour l'équation de l'ellipse rapportée à son sommet de gauche, l'axe des Y' étant perpendiculaire au grand axe de symétrie.

N. B. Les équations (E) et (E_1) donnent, pour $b = a$,

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{et} \quad y^2 = 2ax - x^2;$$

c'est-à-dire *une circonférence* : donc, *cette dernière peut être considérée comme une ellipse dont les axes sont égaux.*

THÉORÈME.

Les carrés des ordonnées de l'ellipse, perpendiculaires à l'un des axes, sont entre eux comme les produits des segments qu'elles déterminent sur cet axe.

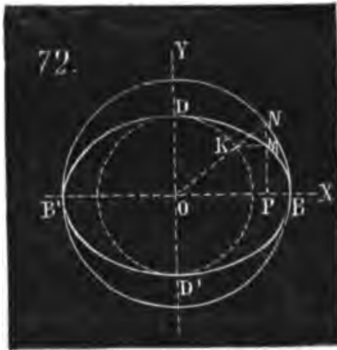
En effet, (x, y) et (x', y') désignant les coordonnées de M et M', on a

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \\ y'^2 &= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2); \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{ \frac{y^2}{y'^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - x'^2} = \frac{(a-x)(a-x)}{(a-x')(a-x')}; \right.$$

et par suite

$$\overline{MP}^2 : \overline{M'P'}^2 :: BP . B'P : BP' . B'P' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Description de l'ellipse.



119. Si nous considérons simultanément l'ellipse

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ et le cercle $x^2 + y^2 = a^2$;

nous en déduisons pour les ordonnées de ces courbes, correspondant à une même abscisse OP (fig. 72),

$$PM : PN :: b : a;$$

c'est-à-dire que *dans l'ellipse, les ordonnées perpendiculaires au grand axe, sont aux ordonnées correspondantes du cercle décrit sur cet axe comme diamètre, comme le petit axe est au grand axe.*

Ainsi sur $BB' = 2a$ et $DD' = 2b$, décrivons deux circonférences; pour une même abscisse OP, PM et PN seront les ordonnées de l'ellipse et du cercle, M étant déterminé par KM parallèle à OB.

En effet, on a

$$PM : PN :: OK : ON;$$

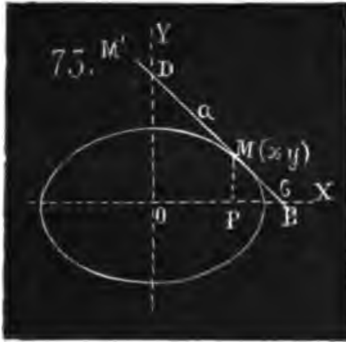
et comme $PN = \sqrt{a^2 - x^2}$, $OK = b$ et $ON = a$, on obtient

$$ay = b\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{d'où} \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

DESCRIPTION CONTINUE DE L'ELLIPSE. *Une droite de longueur constante* $BD = a + b$, *a ses extrémités constamment sur deux axes rectangulaires* OX *et* OY : *le point de jonction* M *des segments, décrit une ellipse dont les axes* $2a$ *et* $2b$ *sont sur* OX *et* OY.

En effet, (x, y) désignant les coordonnées du point M, par rapport à OX et OY, nous avons (fig. 73)

$$b^2 = y^2 + \overline{BP}^2 \qquad (1),$$



et d'autre part, à cause des triangles semblables BDO et BMP,

$$a : b :: x : \mathrm{BP} = \frac{bx}{a};$$

et par suite, en substituant dans (1),

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE. Si le point M était en M' sur le prolongement de BM, de telle sorte que l'on eut

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BM'} - \mathrm{DM'} = a - b = \textit{constante},$$

la courbe serait encore une ellipse, mais avec le grand axe couché sur OY et le petit sur OX.

L'ELLIPSE EST LA PROJECTION ORTHOGONALE D'UN CERCLE. En effet, concevons un cercle formant un angle φ avec un plan passant par son grand axe; une ordonnée y du cercle, perpendiculaire sur cet axe, se projettera suivant une droite $y' = y \cos. \varphi$, également perpendiculaire à cet axe. Donc, l'équation de la projection du cercle sera

$$x^2 + \frac{y'^2}{\cos.^2 \varphi} = a^2,$$

(a étant le rayon de la circonférence); et en posant $\cos. \varphi = b : a$, il vient

$$a^2y'^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

N. B. La théorie des foyers nous donnera tantôt un nouveau moyen de description continue de l'ellipse.

Des foyers & des directrices.

120. Considérons l'équation de l'ellipse, mise sous la forme

$$-\frac{1}{b^2}y^2 - \frac{1}{a^2}x^2 + 1 = 0,$$

et la fonction focale des courbes du second ordre

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (\mu y + \nu x + \pi)^2 = 0;$$

nous obtenons, pour déterminer α, β, μ, ν et π,

$$\frac{1 - \mu^2}{\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2} = -\frac{1}{b^2}, \quad \frac{-\mu\nu}{\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2} = 0, \quad \frac{1 - \nu^2}{\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2} = -\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{-\beta - \mu\pi}{\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha - \nu\pi}{\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2} = 0.$$

Or, la seconde relation exige

$$\mu = 0 \quad \text{ou} \quad \nu = 0;$$

donc, en posant $\mu = 0$, il vient

$$\alpha^2 + \beta^2 - \pi^2 = -b^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 - \pi^2 = (\nu^2 - 1)a^2, \quad \beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \nu\pi = 0.$$

Ainsi de $\beta = 0$, on déduit déjà que les foyers ne peuvent être situés que sur le grand axe de la courbe. De plus, la première et la seconde équation de condition donnent

$$\nu^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2};$$

et par suite

$$\alpha^2 - \pi^2 = -b^2, \quad \text{et} \quad \alpha + \nu\pi = 0;$$

d'où, en éliminant π et remplaçant ν par sa valeur,

$$\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm c.$$

Donc, l'ellipse possède *deux foyers symétriquement situés sur son grand axe par rapport au centre*, et leur construction géométrique résulte de l'intersection de cet axe avec la circonférence ayant a pour rayon et pour centre une des extrémités du petit axe de la courbe.

Pour obtenir maintenant la valeur de π, déterminant la directrice

$$\mu y + \nu x + \pi = 0 \quad \text{et ici} \quad \nu x + \pi = 0;$$

nous devons discuter la relation

$$\alpha + \nu\pi = 0.$$

Or, évidemment pour

$$\alpha = +c, \quad \nu \text{ et } \pi \text{ de signes contraires};$$
$$\alpha = -c, \quad \nu \text{ et } \pi \text{ de même signe};$$

et comme

$$\pi = \pm a,$$

on reconnaît que

$$\alpha = c \quad \text{exige} \quad \nu = \pm\frac{c}{a} \quad \text{avec} \quad \pi = \mp a;$$

tandis que

$$\alpha = -c \quad \text{donne} \quad \nu = \pm\frac{c}{a} \quad \text{avec} \quad \pi = \pm a;$$

et par suite la directrice est

$$\pm\frac{c}{a}x \mp a = 0,$$

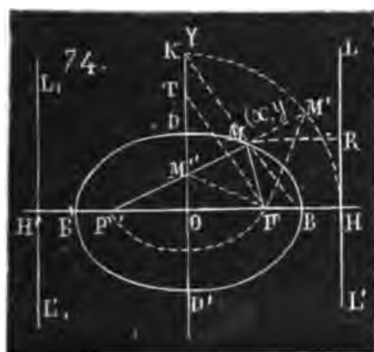
pour le foyer de droite; et pour celui de gauche

$$\pm \frac{c}{a} x \pm a = 0;$$

ou

$$x = \frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad x = -\frac{a^2}{c}$$

pour les deux directrices.



Les foyers F et F' étant construits, on aura facilement

$$FM = a - \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad F'M = a + \frac{cx}{a}:$$

ces distances doivent être prises *positivement*, comme ne se mesurant sur aucune droite fixe; et par suite (fig. 74)

$$FM + F'M = 2a.$$

Ainsi, *la somme des distances d'un point de l'ellipse à ses foyers est constante et égale au grand axe.*

Quant à la construction de la directrice, prenons sur OY, OT = a, joignons TF et traçons BK parallèle à TF; puis rapportant OK à droite et à gauche de l'origine O sur BB'; nous aurons les pieds de ces directrices qui seront LL' et L_1L_1' parallèles à l'axe des Y.

Enfin, il vient encore

$$MF : MR :: \sqrt{\mu^2 + \nu^2} : 1 :: \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} : 1 :: c : a.$$

Donc, *les distances d'un point de l'ellipse, au foyer et à la directrice correspondante sont dans le rapport de l'excentricité* (nom donné à FF') *au grand axe.*

Remarque. Le développement analytique précédent basé sur

$$\mu = 0 \quad \text{exige} \quad a > b;$$

tandis que

$$\nu = 0 \quad \text{demanderait} \quad a < b;$$

et ce cas ne différerait du précédent qu'en ce que l'axe des X serait celui des Y et réciproquement.

Théorème I.

Un point est EXTÉRIEUR *ou* INTÉRIEUR *à une ellipse suivant que la somme de ses distances aux foyers est* PLUS GRANDE *ou* MOINDRE *que le grand axe de la courbe.*

En effet, pour M′ *extérieur*, on a

$$F'M' + FM' > F'M + FM \quad ou \quad 2a;$$

et, pour un point M″ intérieur,

$$F'M'' + FM'' < F'M + FM \quad ou \quad 2a;$$

car $F'M + FM = 2a$.

Théorème II.

Le demi petit axe de l'ellipse est moyen proportionnel entre les deux segments déterminés par chaque foyer sur le grand axe.

En effet, on a

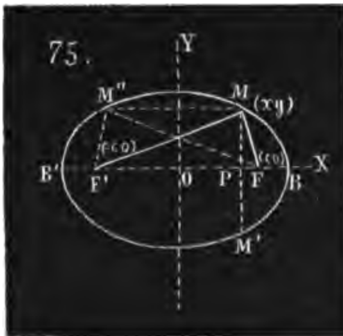
$$BF = OB - OF = a - \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad B'F = OB' + OF = a + \sqrt{a^2 - b^2};$$

d'où $BF \cdot B'F = b^2$ C.Q.F.D.

N. B. Cette propriété, simple et géométrique, a servi de point de départ à Apollonius de Perge pour démontrer l'existence des foyers et des directrices.

Problème.

Quel est le lieu du point dont la somme des distances à deux points fixes est constante et égale à 2a.



Soient F et F′ les points fixes et 2c leur distance; on a (fig. 75)

$$FM + F'M = 2a,$$

M étant un des points du lieu.

Or, on reconnait facilement que M′ symétrique de M par rapport à FF′ est aussi un point de la ligne cherchée et que par suite FF′ est un axe de symétrie; nous prendrons cette droite FF′ pour axe des X, et une semblable considération nous fera choisir la médiatrice normale à FF′ pour la droite des ordonnées.

Ceci posé, en désignant par (x, y) les coordonnées du point M, $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ seront celles des points F et F′; nous aurons, pour les équations de génération du lieu,

$$F'M + FM = 2a \qquad (1),$$

$$\text{G)} \quad (x - c)^2 + y^2 = FM^2 \quad \text{et} \quad (x + c)^2 + y^2 = F'M^2 \quad \text{(G}'.$$

Donc, en éliminant F′M et FM entre (1) et les génératrices circulaires (G) et (G′), on obtiendra la fonction demandée. Or, (G) et (G′) donnent, par voie de soustraction,

$$F'M^2 - FM^2 = 4cx \quad ou \quad (F'M - FM)(F'M + FM) = 4cx,$$

d'où, à cause de (1),

$$F'M - FM = \frac{2cx}{a} \qquad (2);$$

et par suite

$$F'M = a + \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad FM = a - \frac{cx}{a},$$

pour les rayons variables des cercles (G) et (G').

Si maintenant nous remplaçons *la constante variable* de (G) ou de (G') par sa valeur, il vient

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

Mais le triangle F'MF donne

$$FF' < F'M + FM \quad \text{ou} \quad 2c < 2a \quad \text{et} \quad a^2 - c^2 = b^2,$$

d'où, pour le lieu demandé,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire *une ellipse rapportée à ses axes, ayant* F *et* F' *pour foyers et dont les directrices sont*

$$\left.\begin{aligned} a + \frac{cx}{a} &= 0, \\ a - \frac{cx}{a} &= 0; \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{a^2}{c}, \\ x &= \frac{a^2}{c}, \end{aligned}\right\} \text{ pour le foyer de } \left\{\begin{aligned} &\text{gauche.} \\ &\text{droite.} \end{aligned}\right.$$

Description de l'ellipse.

121. I. PAR POINTS. C'est la suite des intersections de couples de circonférences ayant F et F' pour centres et des rayons tels que *leur somme soit égale à 2a.*

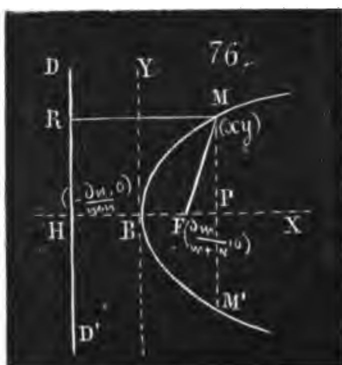
II. CONTINUE. Il suffira de fixer en F et F' les extrémités d'un cordeau de *longueur 2a* et de tendre constamment ce cordeau au moyen d'un style qui, en glissant, décrira la courbe.

PROBLÈME GÉNÉRAL.

122. *Déterminer le lieu du point dans le rapport des distances à un point et à une droite donnés, soit constant ou* :: m : n.

Soient F et DD' le point et la droite donnés, d leur distance et M un point du lieu demandé.

D'abord M' symétrique de M par rapport à FH perpendiculaire à DD' sera également un point du lieu. Ensuite, si nous divisons FH en deux parties $FB = \dfrac{dm}{m+n}$ et $HB = \dfrac{dn}{m+n}$ entre elles :: m : n, le point B appartiendra encore à la courbe cherchée; aussi prendrons-nous FH et sa perpendiculaire BY pour axes coordonnés.



Ceci posé, (x, y) étant les coordonnées du point M, nous avons (fig. 76.)

$$MF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{dm}{m+n}\right)^2} \quad \text{et} \quad MR = x + \frac{dn}{m+n};$$

et par suite

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{dm}{m+n}\right)^2} : x + \frac{dn}{m+n} :: m : n,$$

d'où

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\,x^2 - 2dmnx = 0 \qquad (\varphi).$$

Ainsi *la courbe est du second ordre et* (§ 103) *sera* ELLIPTIQUE, PARABOLIQUE *ou* HYPERBOLIQUE *suivant que l'on aura*

$$m \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} n;$$

de plus, *l'origine* B *des coordonnées est un sommet.*

Simplification de (φ). L'hypothèse $m = n$ donne

$$y^2 = 2dx \qquad (P),$$

parabole ayant $2d$ pour paramètre.

Quant à $m \gtrless n$, nous aurons, pour déterminer le centre,

$$y = 0 \quad \text{et} \quad (n^2 - m^2)\,x - dmn = 0;$$

et en y transportant l'origine, c'est-à-dire en changeant

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} x + \dfrac{dmn}{n^2 - m^2}, \\ y \end{matrix}\right. ;$$

il vient, toute réduction faite,

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\,x^2 = \frac{d^2m^2n^2}{n^2 - m^2} \qquad (\varphi').$$

Enfin, en posant dans (φ') successivement $y = 0$ et $x = 0$ on aurait les longueurs des axes de la courbe; seulement pour $m > n$, celui dirigé suivant la droite des Y serait imaginaire, car (φ) est alors une hyperbole.

123. REMARQUE. La propriété géométrique citée par APOLLONIUS, pour définir les foyers, n'est pas assez saillante pour la regarder comme principale; d'un autre côté, la définition d'EULER, même généralisée par BRET, est d'un caractère trop numérique : aussi est-il préférable de considérer les foyers et les directrices comme formant un seul ensemble dont le problème général précédent constitue l'énoncé.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'ELLIPSE.

XXXᵉ LEÇON.

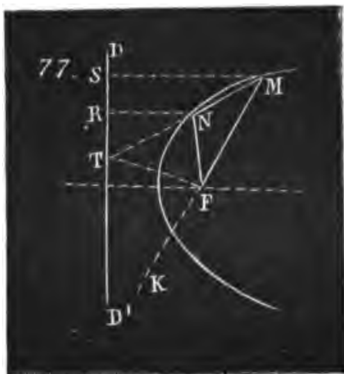
SOMMAIRE.

Applications des propriétés des foyers et des directrices de l'ellipse. — De la tangente et de son inclinaison sur les axes de la courbe. — Théorèmes I. Les points de la tangente, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à l'ellipse. — II. Les tangentes aux extrémités d'un diamètre de l'ellipse sont parallèles. — III. Dans l'ellipse, le produit des directions, par rapport à un axe de la courbe, d'une tangente et du diamètre du contact, est constant. — IV. La sous tangente de l'ellipse, par rapport à un de ses axes, ne dépend que de cet axe. — Construction de la tangente à l'ellipse. — De la normale. — Sous-normale. — Construction de la normale à l'ellipse. — Exercices.

124. Voici quelques questions se rapportant aux foyers et aux directrices de l'ellipse.

Théorème I.

La corde des extrémités de deux rayons vecteurs, passant par le foyer d'une ellipse, coupe la directrice de ce foyer en un point de la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.



En effet, F et DD' étant le foyer et la directrice de l'ellipse MN, nous aurons (fig. 77.)

$$\left.\begin{array}{l} MF:MS::m:n, \\ NF:NR::m:n; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{ MF:NF::MS:NR \quad (1). \right.$$

Mais NR étant parallèle à MS, on a

$$MS : NR :: MT : NT \quad (2);$$

et, par suite des proportions (1) et (2), on obtient

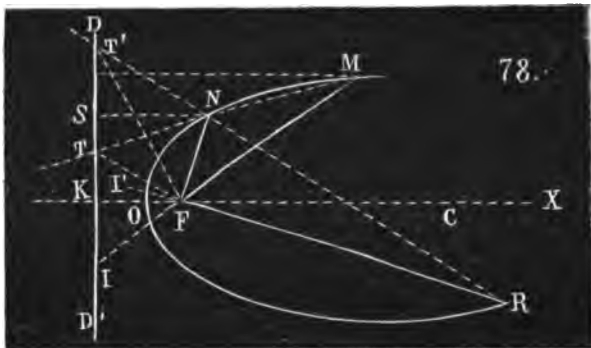
$$MF : NF :: MT : NT.$$

Donc le point T appartient bien à la bissectrice de l'angle NFK.

N. B. *Cette propriété est commune à l'hyperbole et à la parabole.*

PROBLÈME I.

Construire la courbe du second ordre, connaissant un foyer et trois de ses points (fig. 78).



Soient F, M, N et R le foyer et les points donnés; la corde MN et la bissectrice de l'angle NFI déterminent en se coupant un point T de la directrice DD'. De même, la corde NR et la bissectrice de NFI' donnent un second point T' de DD', laquelle est ainsi fixée.

En traçant FX perpendiculaire à DD', nous aurons l'axe de la courbe; et suivant que l'on aura

$$NF : NS \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} 1,$$

la courbe sera *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique*.

Si la courbe est à centre, on a facilement, C étant ce point,

$$CK.\ CF = CO^2,$$

d'où, on déduit

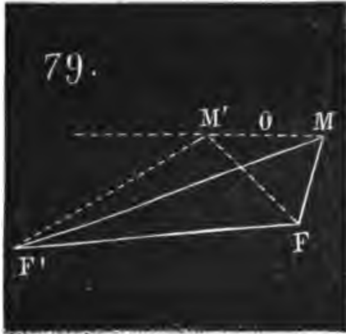
$$CK = \frac{KO^2}{KO - OF}.$$

Cette valeur de CK indique que *le centre est à droite*, *à l'infini* ou *à gauche de la directrice suivant que la courbe est une ellipse*, *une parabole* ou *une hyperbole*.

2me SOLUTION. Cherchons d'abord ; LE LIEU DU SECOND FOYER D'UNE ELLIPSE ADMETTANT UN FOYER DONNÉ ET PASSANT PAR DEUX POINTS DONNÉS.

Soient M, M' et F les points et le foyer donnés, et F' le second foyer; nous avons

$$\left.\begin{array}{l} F'M + FM = \\ F'M' + FM' = \end{array}\right\} \textit{constante} \quad \Big\} \text{ d'où } \Big\{ \ F'M - F'M' = FM' - FM;$$



c'est-à-dire que : *ce lieu est celui du point dont la différence des distances aux points* M *et* M' *est constante;* et nous reconnaîtrons plus tard que c'est une hyperbole ayant MM', pour *excentricité* et le point O, milieu de cette droite, pour centre.

Ainsi le second foyer du problème précédent sera déterminé par l'intersection de *trois* hyperboles ayant pour foyers les combinaisons deux à deux des trois points M, N et R et passant par celui des trois qui n'est point un foyer.

Théorème II.

Dans une ellipse l'angle formé par un rayon vecteur passant par le foyer et la parallèle menée à l'axe des foyers, par l'extrémité du rayon vecteur, a pour bissectrice la droite joignant cette extrémité à l'intersection de la tangente au sommet avec la droite joignant le foyer au point où la parallèle coupe la directrice.



En effet, nous avons

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{MF:MR}::m:n,\\ \mathrm{BF:BH}::m:n;\end{array}\right\}\text{ d'où }\left\{\mathrm{MF:MR::BF:BH}\right. \quad (1).$$

Mais, BO parallèle à HR donne

$$\mathrm{BF : BH :: FO : OR};$$

et par suite, de la proportion (1),

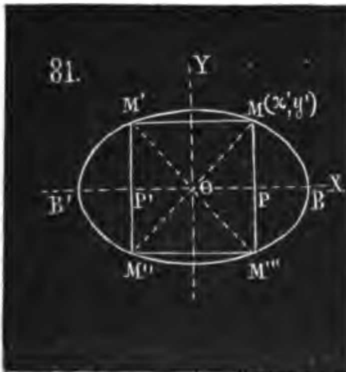
$$\mathrm{MF : MR :: FO : OR}.$$

Donc MO est bien la bissectrice de FMR.

N. B. *Cette propriété appartient également aux deux autres courbes du second ordre.*

Problème II.

Inscrire un carré dans une ellipse.



Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'ellipse rapportée à ses axes et (x', y') les coordonnées d'un des sommets M du carré inscrit MM' M'' M'''; nous aurons évidemment (fig. 81.)

$$y' = x' \quad \text{et} \quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Or, ces deux lieux en (x', y') donnent par leur intersection ce point M, et ne sont autre chose que la bissectrice de l'angle YOX et l'ellipse elle-même.

Quant à la surface du carré : on a, en élimi-

nant y',

$$x' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

et par suite

$$\textit{surface du carré inscrit} = 4x'^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

De la tangente.

125. Désignons par (x', y') les coordonnées du point de contact d'une tangente à l'ellipse; nous aurons, α étant la direction de cette droite,

$$y - y' = \alpha (x - x').$$

Or, toute sécante passant par le point de tangence donne, (x'', y'') étant le second point d'intersection,

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \quad \text{et} \quad a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = 0;$$

et par suite, pour la direction de cette sécante,

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = - \frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')}.$$

Donc, si nous posons $x'' = x'$ et $y'' = y'$, cette direction devient celle de la tangente : ainsi

$$\alpha = - \frac{b^2 x'}{a^2 y'},$$

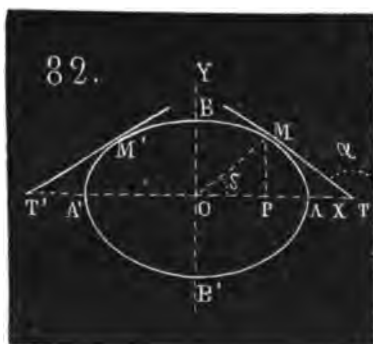
d'où, pour cette droite,

$$y - y' = - \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x'),$$

et, en cherchant la forme entière et réduisant,

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2 \qquad \text{(T)}.$$

Inclinaison de la tangente sur les axes de l'ellipse.



126. Si nous considérons la formule

$$\alpha = - \frac{b^2 x'}{a^2 y'};$$

on obtient, pour le point M allant de A en B, depuis $-\infty$ jusque 0, car y' croît de 0 à b et x' diminue de a à 0, et par suite l'angle MTX varie de 90° à 180° : de B vers A', l'inclinaison de la tangente sur OX augmente de 0° à 90°, l'angle M'T'X étant constamment aigu; et ainsi de suite. Donc, *aux extrémités*

des axes de l'ellipse, la tangente et le diamètre du point de contact sont perpendiculaires; et EN CES POINTS SEULS, CELA EXISTE.

En effet, désignons par V l'angle formé par une tangente et le diamètre du point de contact, nous avons

$$\text{tg.}\,V = \frac{\alpha - \delta}{1 + \alpha\delta}.$$

Or

$$\alpha = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \quad et \quad \delta = \frac{y'}{x'},$$

d'où

$$\text{tg.}\,V = \frac{-a^2 y'^2 - b^2 x'^2}{(a^2 - b^2)\,x'\,y'};$$

et, comme on a

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \quad \text{et} \quad a^2 - b^2 = c^2,$$

on obtient

$$\text{tg.}\,V = \frac{-a^2 b^2}{c^2 x' y'};$$

et par suite

$$\text{tg.}\,V = \infty,$$

pour $y' = 0$ *ou* $x' = 0$; c'est-à-dire pour les extrémités des axes. C. Q. F. D.

THÉORÈME I.

Les points de la tangente à l'ellipse, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe.

Cela revient à démontrer que l'on a

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 > 0,$$

pour un point quelconque (x', y') de la droite

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2 \qquad (T).$$

En effet, le point (x', y') étant sur l'ellipse, nous avons

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2;$$

d'où, en retranchant de cette égalité le double de (T),

$$a^2 (y'^2 - 2yy') + b^2 (x'^2 - 2xx') = -a^2 b^2,$$

et, en complètant les carrés,

$$a^2 (y' - y)^2 + b^2 (x' - x)^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II.

Les tangentes aux extrémités d'un diamètre de l'ellipse, sont parallèles.

En effet, l'ellipse rapportée a ses axes

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

donne, pour la direction de la tangente au point (x', y'),

$$\alpha = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'};$$

et comme $(-x', -y')$ est évidemment, à cause du système d'axes coordonnés, l'autre extrémité du diamètre du contact,

$$\alpha' = -\frac{b^2(-x')}{a^2(-y')} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \alpha \ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME III.

Dans l'ellipse, le produit des directions, par rapport à un axe de la courbe, d'une tangente et du diamètre du point de contact, est constant.

En effet, ces droites ont pour directions

$$\alpha = -\frac{b^2x'}{a^2y'} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{y'}{x'},$$

d'où, en multipliant par ordre

$$\alpha\delta = -\frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME IV.

La sous-tangente de l'ellipse, par rapport à un axe de cette courbe, ne dépend que de cet axe.

D'abord on désigne sous le nom de *sous-tangente, par rapport à un axe, la projection, sur cet axe, de la portion de tangente comprise entre le point de contact et celui de l'intersection de ces droites.*

Ceci posé, nous avons

$$x = \frac{a^2}{x'},$$

pour l'abscisse à l'origine de la tangente,

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2;$$

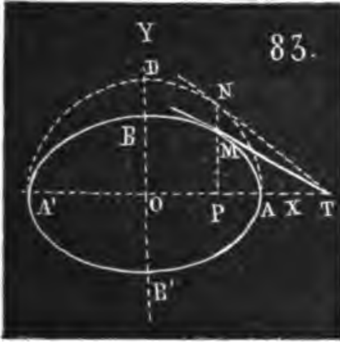
et par suite

$$\textit{sous-tangente} = x - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'} \ldots. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On obtiendrait de même, par rapport au second axe,

$$\textit{sous-tangente} = y - y' = \frac{b^2 - y'^2}{y'}.$$

Construction de la tangente à l'ellipse.



127. La sous-tangente sur l'axe $2a$ étant indépendante de $2b$, elle sera la même pour $2b = 2a$; c'est-à-dire pour la circonférence décrite sur AA' comme diamètre : donc en prolongeant l'ordonnée PM du point de contact M jusqu'à la circonférence AD en N, la tangente NT à cette ligne donnera le pied T de la tangente en M à l'ellipse; d'où TM.

Tangente par un point extérieur.

128. 1re MÉTHODE. Soient (x'', y'') le point donné et (x', y') les coordonnées inconnues du point de contact; nous avons

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \qquad (T)$$

pour la tangente.

Or, (T) passant par le point (x'', y''), on a

$$a^2y''y' + b^2x''x' = a^2b^2 \qquad (1);$$

et, pour exprimer que le point (x', y') est sur l'ellipse

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \qquad (2).$$

Ces équations donnent

$$x' = \frac{a^2(b^2x'' \pm y''\sqrt{a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2})}{a^2y''^2 + b^2x''^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{b^2(a^2y'' \mp x''\sqrt{a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2})}{a^2y''^2 + b^2x''^2}.$$

Ces valeurs font reconnaître immédiatement que la tangente sera *double*, puisque la position du point (x'', y'') implique

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2 > 0.$$

Si le point donné était sur la courbe, on aurait

$$x' = x'' \quad \text{et} \quad y' = y'';$$

c'est-à-dire une seule tangente.

Enfin (x'', y'') étant intérieur à l'ellipse, de

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2 < 0;$$

on déduit que x' et y' sont *imaginaires* et qu'il n'y a pas de tangente.

2me MÉTHODE. Elle consiste dans l'emploi de la théorie de la corde des contacts et nous l'appliquerons ultérieurement à une des deux autres courbes du second

ordre qui admettent les mêmes développements analytiques que la première méthode.

Tangente parallèle à une droite donnée.

128 *bis*. Il est souvent utile de pouvoir écrire spontanément l'équation d'une tangente à l'ellipse et parallèle à une droite donnée. Or, en posant

$$y = mx + n$$

pour l'équation de cette droite; et, en exprimant que cette ligne coupe

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

en deux points confondus en un seul, le lecteur obtiendra facilement

$$n = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2};$$

donc

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

sera la fonction demandée.

De la normale.

129. Nous aurons pour la normale, (x', y') étant le point de contact de la tangente,

$$y - y' = \alpha'(x - x').$$

Or, les axes coordonnés étant rectangulaires, on a

$$\alpha' = -\frac{1}{\alpha} = \frac{\varphi'_{y'}}{\varphi'_{x'}} \quad \text{ou} \quad \alpha' = \frac{a^2y'}{b^2x'};$$

d'où

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \ldots . \quad (\text{N}).$$

De la sous-normale.

130. *La sous-normale, sur un des axes de la courbe, est la projection, sur cet axe, de la partie de la normale comprise entre le point de contact et son intersection avec cet axe.*

Donc, si dans (N) nous posons

$$y = 0,$$

il vient

$$\textit{abscisse à l'origine de } (\text{N}) = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x' = \frac{c^2}{a^2}x';$$

d'où

$$\textit{sous-normale sur } 2a = x' - \frac{c^2}{a^2}x' = \frac{b^2}{a^2}x'.$$

On aurait de même

$$\textit{sous-normale sur } 2b = \frac{a^2}{b^2}\, y'.$$

Si maintenant nous considérons spécialement la sous-normale sur l'axe $2a$, on obtient, en posant $x' = \pm a$,

$$\textit{maximum numérique de sous-normale} = \frac{b^2}{a};$$

et

$$\textit{maximum numérique de } \frac{a^2 - b^2}{a^2}\, x' = \frac{c^2}{a} < c;$$

c'est-à-dire que l'intersection de la normale avec l'axe $2a$ est toujours située entre les foyers, et que la sous-normale maximum sur cet axe vaut : *la demi-corde du foyer, perpendiculaire à cet axe.*

Normale par un point quelconque.

131. Soit (x'', y'') le point donné; nous aurons, pour déterminer le point (x', y') d'intersection de la normale avec l'ellipse (point appelé *pied de la normale*),

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad y'' - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x'' - x').$$

Or, de ces lieux en (x', y'), le premier est l'ellipse et le second qui peut s'écrire, après développement et réduction,

$$c^2x'y' - a^2x''y' + b^2y''x' = 0 \qquad \text{(H)}$$

est *une hyperbole équilatère* (les axes coordonnés étant rectangulaires) *qui passe par le centre* (ici l'origine) *et par le point donné* (x'', y'').

Ainsi, *il pourra être tracé*, en général, *quatre normales du point* (x'', y''); et pour le cas où *ce point serait sur l'un des axes, on pourra encore en tirer quatre*, mais *deux seront l'axe transverse :* en effet, $y'' = 0$ réduit l'hyperbole à ses asymptotes, puisque l'équation (H) se transforme en

$$y'(c^2x' - a^2x'') = 0.$$

Exercices.

1° On a une série d'ellipses concentriques semblables et dont les axes homologues sont dirigés suivant les mêmes droites. Quel est le lieu des points de contact des tangentes à ces ellipses et menées par un point donné?

2° Étant donnés deux carrés ABCD et *abcd* concentriques et tels que les côtés du carré intérieur soit parallèles aux diagonales de l'autre; on demande de circonscrire au petit carré, une ellipse qui soit inscrite au plus grand.

3° Inscrire une ellipse dans un triangle donné, et passant par deux points également donnés?

4° La droite $y = -4x + 1$ est-elle normale à l'ellipse

$$2y^2 - 4xy + 3x^2 - 2y - x + 1 = 0 ?$$

5° Déterminer A de telle sorte que

$$xy + A = 0$$

soit tangent à l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

6° Un angle constant V, dont le sommet est au foyer de gauche d'une ellipse, tourne autour de ce sommet; quel est le lieu de l'intersection des projetantes sur les côtés de l'angle, des points où ces mêmes côtés rencontrent l'ellipse.

7° A partir d'un point quelconque de l'ellipse on porte sur la normale de ce point une longueur égale à $k^2 : p$, k étant une constante et p la distance du centre à la tangente : quel est le lieu de l'extrémité de cette droite ?

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'ELLIPSE.

XXXI° & XXXII° LEÇON.

SOMMAIRE.

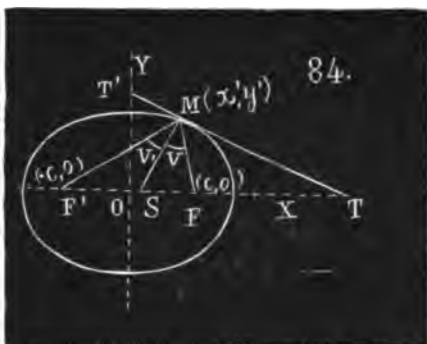
Théorème. La normale de l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs menés des foyers à un point de la courbe. — Corollaire. — Construction, au moyen des foyers, de la tangente en un point de l'ellipse. — Lieu de la projection des foyers de l'ellipse sur la tangente à cette courbe. I. Solutions géométrique & analytique. — Construction de la tangente à l'ellipse par un point extérieur à la courbe. Scolies. — Applications développées. — Exercices.

Relations angulaires entre la tangente à l'ellipse, la normale et les rayons vecteurs menés du foyer au point de contact.

132. Les théories qui vont être exposées dans ces deux leçons, sont importantes au double point de vue de la construction des courbes du second ordre et de leur étude comparative.

THÉORÈME.

La normale de l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs, menés du foyer à un point de la courbe.



Soit (x',y') un point M de l'ellipse rapportée à ses axes; nous aurons (fig. 84)

$$\frac{a^2y'}{b^2x'},\quad \frac{y'}{x'-c}\quad \text{et}\quad \frac{y'}{x'+c}$$

pour les directions de la normale MS et des rayons vecteurs FM, F'M; d'où, en désignant par V et V' les angles SMF et SMF', il vient, quelques réductions s'effectuant par les relations

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2\quad \text{et}\quad a^2-b^2=c^2,$$

$$\text{tg.V}=\frac{\frac{y'}{x'-c}-\frac{a^2y'}{b^2x'}}{1+\frac{a^2y'^2}{b^2x'(x'-c)}}=\frac{-(a^2-b^2)x'y'+a^2cy'}{a^2y'^2+b^2x'^2-b^2cx'}=\frac{cy'(a^2-cx')}{b^2(a^2-cx')}=\frac{cy'}{b^2},$$

$$\text{tg.V}'=\frac{\frac{a^2y'}{b^2x'}-\frac{y'}{x'+c}}{1+\frac{a^2y'^2}{b^2x'(x'+c)}}=\frac{(a^2-b^2)x'y'+a^2cy'}{a^2y'^2+b^2x'^2+b^2cx'}=\frac{cy'(a^2+cx')}{b^2(a^2+cx')}=\frac{cy'}{b^2};$$

donc

$$V=V'. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire. *Les rayons vecteurs menés des foyers au point de contact d'une tangente à l'ellipse, sont également inclinés sur les parties opposées de cette droite.*

En effet, les angles FMT et F'MT' sont complémentaires des angles V et V'.

Construction, au moyen des foyers, de la tangente en un point de l'ellipse.



133. 1er MODE. Soient F', F et M (fig. 85) les foyers et le point de contact donnés, la perpendiculaire MI à la bissectrice MS de l'angle F'MF sera la tangente demandée; car MS est normale au point M.

2e MODE. Prolongeons le rayon vecteur F'M de MK = FM, la perpendiculaire MI sur FK sera la droite cherchée.

En effet, le triangle isocèle FMK donne

FMI = KMI,

de plus, comme opposés par le sommet,

IMK = F'MI',

donc FMI = F'MI';

et par suite du corollaire précédent, MI est bien la tangente.

Du reste, il est facile de démontrer : *que chaque point de la droite* MI, *ainsi construite, est en dehors de l'ellipse.*

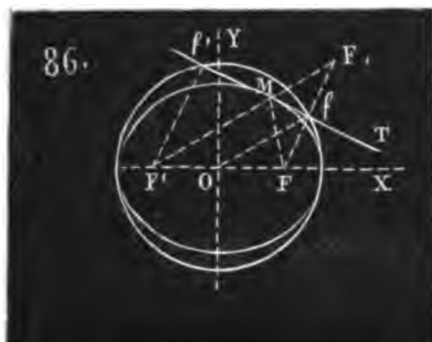
Car I' étant un point autre que le point de contact, on a, en traçant F'I', I'F et I'K,

$$F'I' + I'K > F'K, \quad \text{mais} \quad I'K = I'F \quad et \quad MK = FM;$$

donc

$$F'I' + FI' > F'M + FM \quad \text{ou} \quad 2a. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lieu de la projection des foyers de l'ellipse sur la tangente à cette courbe.



134. SOLUTION GÉOMÉTRIQUE. Soit TM une tangente quelconque à l'ellipse, et f la projection du foyer F sur cette droite (fig. 86).

Le rayon vecteur F'M du second foyer rencontrera Ff en un point F_1, symétrique de F par rapport à la tangente; car le triangle FMF_1 est évidemment isocèle. De plus, le point f est le milieu de la base FF_1 donc

$$2Of = F'F_1.$$

Mais

$$F'F_1 = F'M + MF = 2a,$$

donc

$$2Of = 2a \text{ ou } Of = a.$$

Ainsi *le lieu demandé est la circonférence décrite sur le grand axe* 2a *comme diamètre.*

SOLUTION ANALYTIQUE. Soit (x', y') un point quelconque de la directrice elliptique

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (D).$$

Nous avons pour première génératrice du lieu

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \qquad (G);$$

c'est-à-dire la tangente au point (x', y'). Quant à la seconde génératrice, elle est la projetante du foyer F sur la première, ou

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - c).... \qquad (G').$$

Enfin, la condition qui règle le mouvement du point $(x' y')$, est

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \quad (1);$$

car le point se trouve sur (D).

Ainsi (VI[e] leçon), tout se réduit à éliminer les CONSTANTES VARIABLES x' et y' entre (G), (G') et (1) : or, (G) et (G') donnent

$$y' = \frac{b^2 y}{y^2 + x^2 - cx} \quad \text{et} \quad x' = \frac{a^2 (x - c)}{y^2 + x^2 - cx},$$

d'où, en substituant dans (1), il vient successivement,

$$b^2 y^2 + a^2 (x - c)^2 = (y^2 + x^2 - cx)^2,$$
$$y^4 + y^2 [2x (x - c) - b^2] + (x - c)^2 (x^2 - a^2) = 0:$$

et, comme $b^2 = a^2 - c^2$, on a

$$2x (x - c) - b^2 = (x - c)^2 + (x^2 - a^2).$$

Donc

$$y^4 + y^2 [(x - c)^2 + (x^2 - a^2)] + (x - c)^2 (x^2 - a^2) = 0,$$
$$y^2 [y^2 + (x - c)^2] + y^2 (x^2 - a^2) + (x - c)^2 (x^2 - a^2) = 0,$$
$$y^2 [y^2 + (x - c)^2] + (x^2 - a^2) [y^2 + (x - c)^2] = 0,$$
$$[y^2 + (x - c)^2] [y^2 + x^2 - a^2] = 0.$$

Or, la solution

$$y^2 + (x - c)^2 = 0$$

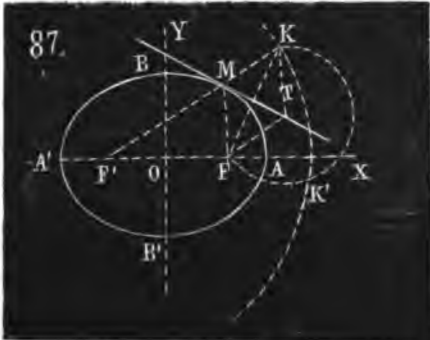
caractérisant le foyer, doit évidemment être rejetée, et il ne reste que

$$y^2 + x^2 - a^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = a^2 \ldots \quad (\varphi);$$

c'est-à-dire *la circonférence décrite sur l'axe des foyers.* C. Q. F. D.

Construction de la tangente à l'ellipse par un point extérieur à la courbe.

138. Du point T donné comme centre et avec TF (fig. 87) comme rayon, décrivons une circonférence; puis de l'autre foyer F' avec $2a$ traçons une seconde circonférence.



Or, nous avons, d'après la position de T,

$$F'T + FT > 2a,$$

donc

$$F'T > 2a - TF;$$

ou, *la distance des centres des deux cercles plus grande que la différence de leurs rayons.*

De plus, le point T fut-il même sur l'axe des foyers,

$$F'T < F'F + FT \textit{ et à fortiori } F'T < 2a + FT,$$

c'est-à-dire *la distance des centres moindre que la somme des rayons.*

Donc *ces circonférences se coupent* en K *et* K' : traçons F'K et l'intersection M de cette droite avec l'ellipse, sera le point de contact de la tangente TM.

En effet, il résulte de TK = TF et de MF = MK (car MF' + MF = $2a$ = F'M + MK) que TM est perpendiculaire à la base FK du triangle isocèle FMK; et comme des angles égaux KMT et TMF d'une part et de KMT = IMF' d'autre part, on déduit

$$FMT = IMF';$$

donc, TM est bien tangente en M. Du reste, on obtient le même résultat en remarquant que pour un point I de TM, autre que M, on a, en traçant IF, IF' et IK,

$$IF + IF' = IK + IF' > F'K \text{ ou } 2a,$$

c'est-à-dire que le point I est extérieur à l'ellipse, ainsi que tous les autres. C.Q.F.D.

SCOLIES I. *D'un point extérieur à l'ellipse on peut tracer deux tangentes.*

II. Si le point T était sur la courbe, on aurait

$$TF' + TF = 2a;$$

c'est-à-dire que les deux circonférences précédentes seraient *tangentes intérieurement* et il n'y aurait plus qu'*une seule tangente*.

III. Enfin, lorsque le point T est *intérieur* à la courbe,

$$F'T + TF < 2a \quad \text{ou} \quad F'T < 2a - TF,$$

alors les deux cercles sont *intérieurs* et on ne pourra tracer *aucune* tangente.

Applications développées.

136. Voici quelques applications sur les théories précédentes.

THÉORÈME I.

Le rectangle des distances des foyers d'une ellipse à une de ses tangentes vaut le carré du demi-petit axe.

Nous avons pour la tangente en (x', y')

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \quad \text{ou} \quad a^2yy' + b^2xx' - a^2b^2 = 0;$$

d'où, pour ses distances aux foyers (c, o) et $(-c, o)$,

$$p = \frac{b^2(cx' - a^2)}{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}, \quad p' = \frac{-b^2(cx' + a^2)}{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}};$$

et par suite

$$p \cdot p' = \frac{-b^4(c^2x'^2 - a^4)}{a^4y'^2 + b^4x'^2} \qquad (1).$$

Or, de

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2,$$

on déduit facilement, à cause de $a^2 - b^2 = c^2$,

$$a^4y'^2 = a^4b^2 - a^2b^2x'^2,$$
$$a^4y'^2 + b^4x'^2 = b^2[a^4 - (a^2 - b^2)x'^2] = b^2(a^4 - c^2x'^2);$$

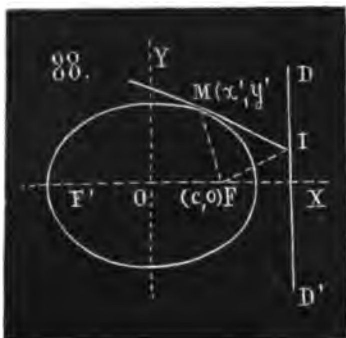
d'où, en substituant dans (1) et après simplification,

$$p \cdot p' = b^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. Ce théorème est commun à l'hyperbole.

THÉORÈME II.

La perpendiculaire élevée par le foyer au rayon vecteur du point de contact d'une tangente à l'ellipse, coupe cette dernière droite en un point situé sur la directrice du foyer considéré (fig. 88).



En effet, nous avons, pour la tangente en M,

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2;$$

et, pour la perpendiculaire FI au rayon vecteur FM,

$$y = -\frac{x' - c}{y'}(x - c).$$

Or, en éliminant y entre ces deux fonctions, on a

$$x\left[(a^2 - b^2)x' - a^2c\right] = a^2\left[cx' - (b^2 + c^2)\right];$$

mais, $a^2 - b^2 = c^2$ donnant $a^2 = b^2 + c^2$, il vient

$$x(c^2x' - a^2c) = a^2(cx' - a^2),$$

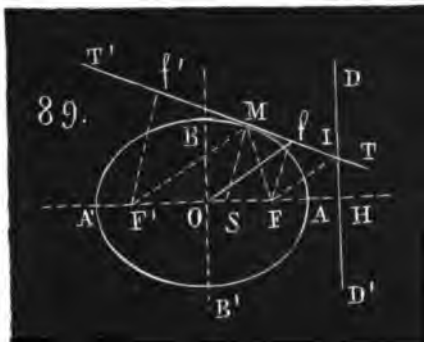
d'où

$$x = \frac{a^2}{c}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. Cette propriété appartient également à la parabole et à l'hyperbole.

PROBLÈME I.

Construire l'ellipse dont on connaît : un foyer, la directrice correspondante et une tangente (fig. 89).



Soient F, DD' et TT' le foyer et les droites donnés : d'abord le rayon vecteur FM perpendiculaire à la droite FI (Th. précédent) détermine le point de contact de la tangente; et par suite la normale MS fixe le rayon vecteur F'M du second foyer, par l'angle T'MF' = TMF; et l'intersection F' de F'M avec FH, perpendiculaire à la directrice DD', donne le second foyer et par suite le centre O de l'ellipse.

D'un autre côté, la projection f du foyer F sur la tangente étant un point de la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, of est ce demi-grand axe; d'où les sommets A et A'.

Enfin, les extrémités B et B' du petit axe s'obtiendront facilement, car ils sont éloignés du foyer F ou F' de Of.

Ainsi la courbe peut maintenant être tracée, puisque l'on connaît ses axes en grandeur et en position.

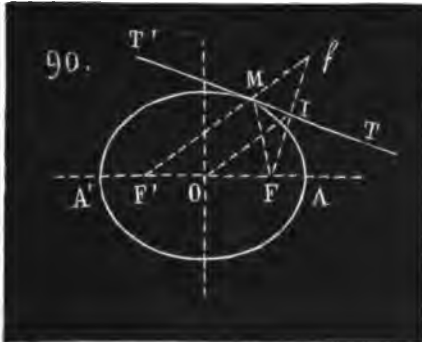
N. B. Nous verrons plus tard que si la disposition des données de la question indiquait

$$OF > of \quad \text{ou} \quad MF \text{ parallèle à } FH$$

la courbe serait *une hyperbole* ou *une parabole*.

PROBLÈME II.

Construire l'ellipse dont on connait les foyers et une tangente (fig. 90).



Soient F, F' et TT' les foyers et la tangente donnés : D'abord le centre O sera celui de FF'; ensuite f symétrique de F par rapport à TT', joint à F' donnera le point M de contact de la tangente TT'; et la distance OI du centre à la projection de F sur TT' sera le demi-grand axe.

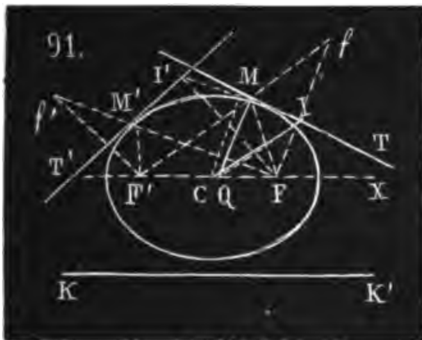
Ainsi la courbe peut se construire comme dans le problème précédent.

N. B. Le lieu serait une hyperbole si les positions géométriques des éléments donnés étaient telles que l'on eut

$$OF' > OI.$$

PROBLÈME III.

Construire l'ellipse connaissant : un foyer, deux tangentes et la direction de l'un des axes (fig. 91).



Soient F, T, T' le foyer et les tangentes, et KK' la direction du grand axe; en traçant FX parallèle à KK', nous obtenons l'axe des foyers; puis les projections I et I' du foyer F déterminent une corde II' du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, d'où on déduit facilement le centre C et par suite le second foyer F' et le demi-grand axe CI.

Ainsi l'ellipse est complètement déterminée, du reste une construction simple, indiquée sur la figure, fixe les points de contact des tangentes T et T'.

N. B. La courbe serait *une parabole* si la médiatrice perpendiculaire à la corde II' se trouvait parallèle à FX, et *une hyperbole* si on avait

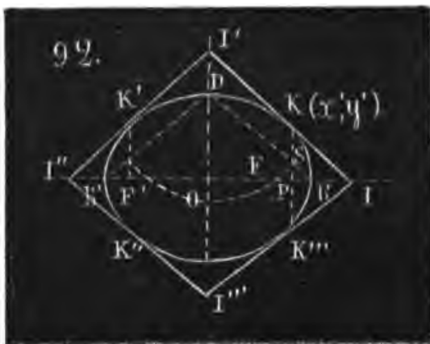
$$CF > CI.$$

PROBLÈME IV.

Circonscrire un carré à une ellipse et déterminer sa surface (fig. 92).

Soit II'I''I''' le carré demandé et (x', y') le point de contact d'un des côtés, II' par exemple, dont l'équation sera

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$



Or, les coordonnées à l'origine de cette droite devant être égales, comme demi-diagonales du carré, on a

$$\frac{a^2}{x'} = \frac{b^2}{y'} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{b^2}{a^2}x' \qquad \text{(G)};$$

c'est-à-dire une droite donnant le point de contact K, par son intersection avec l'ellipse

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \qquad \text{(G')}.$$

Mais la construction de cette droite étant assez compliquée, nous allons la remplacer par l'ordonnée KP déterminée par x'; à cet effet, éliminons y' entre (G) et (G'), il vient

$$x' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{\text{BD}} \quad \text{ou} \quad \text{BD} : a :: a : x'.$$

Donc, prenons sur DB, une partie DS $= a$, KSP perpendiculaire à OI sera PK, car on a

$$\text{DB} : \text{DS} :: \text{OB} : \text{OP} \quad \text{ou} \quad \text{BD} : a :: a : \text{OP};$$

c'est-à-dire OP $= x'$. C. Q. F. D.

Le point K étant construit, le reste s'achève facilement. Quant à la surface du carré, on a

$$\text{OI} = \frac{a^2}{x'} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

d'où

$$\textit{carré circonscrit à l'ellipse} = 2\,(a^2 + b^2).$$

SCOLIE. En comparant cette surface à celle du carré inscrit, on a

$$\textit{carré circonscrit} : \textit{carré inscrit} :: (a^2 + b^2)^2 : 2a^2b^2.$$

PROBLÈME V.

Quel est le lieu du pied de la normale, abaissée d'un point situé sur le petit axe variable d'une ellipse dont le grand axe est constant ?

Soit $2a$ l'axe constant dirigé suivant OX, et 2β l'axe variable coïncidant avec OY; l'ellipse variable aura pour équation

$$a^2y^2 + \beta^2x^2 = a^2\beta^2 \qquad \text{(D)}.$$

Si maintenant (o, b) sont les coordonnées du point donné, (x', y') celles du pied de la normale; nous aurons,

$$\frac{a^2y'}{\beta^2x'} \quad \text{et} \quad y - b = \frac{a^2y'}{\beta^2x'}\,x$$

pour la direction de la normale et cette droite elle-même; de plus, cette droite devant passer par (x', y'), il vient

$$y' - b = \frac{a^2y'}{\beta^2} \qquad \text{(G)}$$

pour une génératrice du point cherché.

Enfin, le pied de la génératrice étant sur (D), on a

$$a^2y'^2 + \beta^2x'^2 = a^2\beta^2 \qquad (G');$$

et par suite l'élimination de *la constante variable* β entre (G) et (G') donnera l'équation du lieu demandé.

Or, (G') peut s'écrire

$$a^2y'^2 = \beta^2(a^2 - x'^2);$$

d'où, en combinant avec (G) par voie de multiplication,

$$a^2y'^2(y' - b) = a^2y'(a^2 - x'^2).$$

DISCUSSION. Le facteur a^2y', donnant la solution analytique

$$y' = 0,$$

indique l'axe des X; mais cette solution est évidemment étrangère et, après avoir ôté ce facteur, il reste

$$y'(y' - b) = a^2 - x'^2$$

ou

$$\left(y' - \frac{b}{2}\right)^2 + x'^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} \quad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu est une circonférence ayant pour centre le milieu de la distance du centre de l'ellipse au point donné et passant par les extrémités du grand axe commun.*

N. B. Ce lieu (φ) serait le même si on remplaçait l'ellipse directrice (D) *par une hyperbole.*

PROBLÈME VI.

Déterminer le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents à une ellipse donnée.

Soient

$$\text{E)} \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad y - \beta = m(x - \alpha) \qquad (\text{D},$$

les équations de l'ellipse et d'une droite passant par le point (α, β) du lieu demandé.

La droite (D) sera une génératrice du lieu, si nous exprimons que l'équation résultant de l'élimination de y entre (E) et (D) donne des valeurs égales pour x; or, cette équation étant

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2m(\beta - m\alpha)x + a^2[(\beta - m\alpha)^2 - b^2] = 0,$$

on en déduit, pour la condition de racines égales,

$$(a^2 - \alpha^2)m^2 + 2\alpha\beta m + b^2 - \beta^2 = 0 \qquad (1).$$

Mais les valeurs de m, étant les directions des génératrices (D), exigent

$$m'm'' = -1,$$

puisque les tangentes sont rectangulaires entre elles; donc

$$m'm'' = \frac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2},$$

par une propriété de constitution de l'équation du second degré; et par suite

$$-1 = \frac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2},$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2 \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire *la circonférence circonscrite au rectangle des axes.*

N. B. Ce problème, déjà établi pour les trois courbes du second ordre, donne

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 - b^2$$

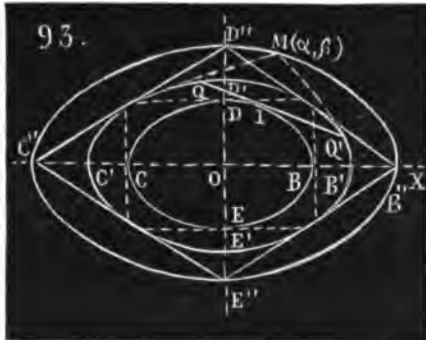
lorsque l'ellipse (E) se change en hyperbole, et son existence implique

$$a > b;$$

et (φ) devient un point si l'hyperbole est *équilatère.*

PROBLÈME VII.

Chercher le lieu du sommet d'un angle dont les côtés, tangents à une ellipse, déterminent une corde de contact tangente à une autre ellipse concentrique et dont les axes coïncident en position avec ceux de la première.



Les points remarquables du lieu sont immédiatement B'', C'', D'' et E'' déterminés par les cordes de la grande ellipse et tangentes aux sommets de la petite.

Soit maintenant Q Q' une corde quelconque tangente à l'ellipse BDCE, elle fixe la position de deux tangentes MQ et MQ' à la courbe B'D'C'E'; et par suite un point M (α, β) du lieu.

Ceci posé, soient

$$\text{E)} \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \qquad \text{(E'}$$

les ellipses directrices; nous aurons

$$a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2$$

pour *une génératrice* MQ' du lieu et, comme cette droite doit passer par le point (α, β), il vient

$$a'^2\beta y' + b'^2\alpha x' = a'^2b'^2 \quad \text{ou} \quad a'^2\beta y + b'^2\alpha x = a'^2b'^2 \quad (1)$$

pour la corde des contacts QQ'.

Or, la droite (1) devant être tangente à (E), l'élimination de y entre leurs équations devra donner pour x des valeurs égales. Pour faciliter ce calcul, écrivons (1) de la manière suivante

$$y = cx + d,$$

on obtient

$$(a^2c^2 + b^2)\,x^2 + 2a^2cdx + a^2(d^2 - b^2) = 0;$$

et par suite, à cause de la nature des valeurs de x,

$$a^2c^2 + b^2 - d^2 = 0,$$

d'où, en remplaçant c et d par leurs valeurs,

$$a'^2b^2\beta^2 + b'^4a^2x^2 = a'^4b'^4 \qquad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu est une ellipse concentrique aux proposées et dont les axes se superposent à ceux de* (E) *et de* (E').

SCOLIES I. *Si* (E) *et* (E') *sont semblables*, (φ) *leur sera également semblable.*

II. *Lorsque* (E') *sera une hyperbole*, (φ) *ne subira aucune altération.*

En effet, ce changement s'opérera en remplaçant b'^2 par $-b'^2$, alors on obtient

$$a'^4b^2\beta^2 + b'^4a^2\alpha^2 = a'^4b'^4 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

III. Lorsque (E) est une hyperbole, on obtient, en changeant b^2 en $-b^2$,

$$a'^4b^2\beta^2 - b'^4a^2\alpha^2 = -a'^4b'^4 \qquad (\varphi')$$

c'est-à-dire *une hyperbole.*

IV. Enfin (E) et (E') étant hyperboliques, on obtient encore (φ') semblable aux hyperboles directrices si ces dernières sont semblables.

Exercices.

1° La projection de la portion de la normale, comprise entre le point de contact et le grand axe, sur l'un des rayons vecteurs, vaut le demi paramètre.

2° Par le milieu de la distance des centres de deux cercles égaux, on trace une sécante quelconque. Quel est le lieu de l'intersection des rayons menés aux points où cette sécante coupe les deux circonférences ?

3° Deux angles constants tournent autour de leurs sommets, deux de leurs côtés se coupent sur une droite donnée; quel est le lieu de l'intersection des deux autres ?

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'ELLIPSE.

XXXIIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Des diamètres : Les diamètres de l'ellipse passent par le centre. La réciproque est vraie. — Théorème I. Dans une ellipse, le produit des directions d'un diamètre et de sa corde conjuguée est constant. — Théorème II. Les cordes conjuguées d'un diamètre de l'ellipse sont parallèles aux tangentes menées aux extrémités de ce diamètre.— Diamètres et axes conjugués : Théorème. Le produit des directions de deux diamètres conjugués de l'ellipse est constant. — L'ellipse n'a qu'un seul système d'axes conjugués. — Des cordes supplémentaires : Théorème I. Le produit des directions, par rapport aux axes, de deux cordes supplémentaires est constant. Réciproques I & II.— Théorème II. Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués. — Théorème III. L'angle formé par deux diamètres conjugués d'une ellipse, a une limite minimum & une autre maximum. — Problème. Construire deux diamètres conjugués & formant l'angle θ. — Théorème IV. Le diamètre du point de contact d'une tangente parallèle à une corde supplémentaire, est parallèle à l'autre corde supplémentaire. — Applications. — Exercices.

Des diamètres.

137. Si nous appliquons à l'équation aux axes de l'ellipse, une des théories

de la détermination des diamètres; nous aurons

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x \qquad (d),$$

pour le diamètre d'un système de cordes parallèles, ayant m pour direction.

Ainsi, nous retrouvons ce théorème général : *les diamètres de l'ellipse sont des droites et passent par le centre.*

RÉCIPROQUEMENT, *toute droite menée par le centre d'une ellipse est un diamètre.* En effet, si δ est la direction de cette droite, on aura

$$\delta = -\frac{b^2}{a^2m} \quad \text{ou} \quad m = -\frac{b^2}{a^2\delta}$$

pour la direction du système des cordes parallèles ayant cette droite pour diamètre.

THÉORÈME I.

Dans une ellipse, le produit des directions, par rapport à un axe, d'un diamètre et de sa corde conjuguée, est constant.

En effet, m étant la direction de la corde et δ celle du diamètre, on a

$$\delta = -\frac{b^2}{a^2m} \quad \text{d'où} \quad m\delta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

THÉORÈME II.

Les cordes conjuguées d'un diamètre de l'ellipse sont parallèles aux tangentes menées aux extrémités de ce diamètre.

En effet, α étant la direction de la tangente à l'extrémité d'un diamètre, on obtient

$$\alpha\delta = -\frac{b^2}{a^2} \quad \text{mais} \quad m\delta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Donc

$$m = \alpha. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Diamètres conjugués.

138. Si nous considérons un second diamètre ayant m pour direction, sa corde conjuguée sera

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x + n,$$

ou sera parallèle au premier diamètre; donc, *ces diamètres seront conjugués,* puisque chacun divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

THÉORÈME.

Le produit des directions, par rapport à un axe, de deux diamètres conjugués de l'ellipse, est constant.

En effet,

$$m\delta = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SCOLIE. Le produit $m\delta$ ne peut ici devenir égal *à moins l'unité*, que pour le cas de $b = a$; c'est-à-dire que lorsque *l'ellipse se transforme en un cercle.* Ainsi l'*ellipse n'a qu'un seul système d'axes conjugués.*

Des cordes supplémentaires.

139. On désigne ainsi *deux cordes menées d'un même point de la courbe aux extrémités d'un même diamètre.*

THÉORÈME I.

Le produit des directions, par rapport à un axe, de deux cordes supplémentaires, est constant.

En effet, soient γ et γ' les directions des cordes menées du point (x, y) de l'ellipse aux extrémités (x', y') et $(-x', -y')$ d'un diamètre; nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \dfrac{y-y'}{x-x'},\\[2mm] \gamma' = \dfrac{y+y'}{x+x'},\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\gamma\gamma' = \frac{y^2-y'^2}{x^2-x'^2}.\right.$$

Or, ces points étant sur l'ellipse, on a

$$\left.\begin{array}{l}a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,\\ a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2,\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\frac{y^2-y'^2}{x^2-x'^2} = -\frac{b^2}{a^2};\right.$$

donc $\gamma\gamma' = -\dfrac{b^2}{a^2}$.

RÉCIPROQUES I. *Si pour deux cordes tirées d'un même point de l'ellipse on a, pour leurs directions γ et γ',*

$$\gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2},$$

leurs secondes extrémités seront celles d'un diamètre.

Si par les extrémités d'un même diamètre de l'ellipse, on trace deux cordes pour les directions desquelles on ait

$$\gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2},$$

elles se couperont sur l'ellipse.

Ces réciproques s'établissent facilement par la *réduction à l'absurde*.

THÉORÈME II.

Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués.

En effet, nous avons trouvé

$$m\delta = -\frac{b^2}{a^2} \quad \text{et} \quad \gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2};$$

donc de

$$m = \gamma \quad \text{on déduit} \quad \delta = \gamma'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME III.

L'angle formé par deux diamètres conjugués d'une ellipse est compris entre un MINIMUM *et un* MAXIMUM.

En effet, désignons par V l'angle de deux cordes supplémentaires tirées des extrémités de l'axe des foyers à un point de la courbe; nous aurons

$$\text{tg. V} = \frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{y}{x+a}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2ay}{x^2 - a^2 + y^2}.$$

Or, de

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{on obtient} \quad x^2 - a^2 = \frac{-a^2y^2}{b^2};$$

et par suite

$$\text{tg. V} = \frac{-2ab^2}{(a^2-b^2)\,y} = \frac{-2ab^2}{c^2y}.$$

Mais cet angle V sera MAXIMUM pour y MAXIMUM, donc

$$y = b;$$

c'est-à-dire que ces cordes supplémentaires sont *celles qui se coupent à l'une des extrémités du petit axe* et leurs directions sont

$$-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad +\frac{b}{a}.$$

Le MINIMUM de *cet angle* MAXIMUM, *sera évidemment son supplément.*

N. B. Nous établirons plus tard l'égalité des diamètres ayant ces directions.

PROBLÈME.

Construire deux diamètres conjugués formant un angle θ.

Sur un diamètre comme corde, on décrira un segment circulaire capable de l'angle θ : puis on tracera par le centre des parallèles aux cordes supplémentaires

menées des extrémités du diamètre aux intersections de l'ellipse et de l'arc du segment circulaire précité.

En effet, ces cordes supplémentaires forment l'angle θ et son supplément $180° - \theta$; de plus, tant que ces diamètres conjugués ne seront pas les axes, il y aura *deux* solutions; car l'un de ces angles ne peut exister sans l'autre, à moins d'avoir $\theta = 90°$. Dans ce dernier cas, les deux systèmes se confondent en *un* seul, *qui est celui des axes de la courbe.*

THÉORÈME IV.

Le diamètre du point de contact d'une tangente parallèle à une corde supplémentaire, est parallèle à l'autre corde supplémentaire.

En effet, de

$$\left.\begin{aligned} \alpha\delta &= -\frac{b^2}{a^2}, \\ \gamma\gamma' &= -\frac{b^2}{a^2}, \end{aligned}\right\} \text{ on déduit } \quad \delta = \gamma', \quad \text{pour} \quad \alpha = \gamma.$$

Ainsi pour mener une tangente parallèle à une droite donnée : on trace une corde parallèle à cette droite, le diamètre parallèle à la corde supplémentaire de la précédente sera celui du point de contact.

N. B. On construira facilement le centre de l'ellipse au moyen de deux diamètres déterminés par deux systèmes de cordes parallèles, ayant des directions différentes.

Applications.

THÉORÈME.

La perpendiculaire abaissée du foyer de l'ellipse sur une de ses cordes, coupe le diamètre de cette corde sur la directrice de ce foyer.

En effet, en considérant l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

et la corde dont m est la direction; nous aurons

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{m}(x - c)$$

pour le diamètre correspondant et la perpendiculaire abaissée du foyer de droite sur une de ces cordes; d'où

$$x = \frac{a^2}{c}$$

pour l'abscisse de leur intersection. C. Q. F. D.

N. B. Cette propriété appartient également à l'hyperbole et à la parabole.

PROBLÈME I.

Construire les foyers d'une courbe à centre du second ordre dont on connait : le centre, deux points et une directrice.

On tracera le diamètre de la corde des deux points, de son intersection avec la directrice on abaissera une perpendiculaire sur la corde : un foyer sera au point de concours de cette perpendiculaire avec l'axe. Le second foyer se construit facilement au moyen du centre.

N. B. Si la courbe est *une parabole*, le centre étant remplacé par l'axe, la construction se fait de la même manière.

PROBLÈME II.

Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés tangents à une ellipse, sont parallèles à deux cordes supplémentaires *ou* à deux diamètres conjugués?

Il résulte d'abord de la génération du lieu que les tangentes aux sommets de la courbe, déterminent *quatre* points spéciaux; ensuite, celles menées par les extrémités des diamètres parallèles aux cordes supplémentaires formant l'angle *maximum*, donnent encore *quatre* points remarquables.

Ceci posé, soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad \text{(D)}$$

l'ellipse directrice, en désignant par m la direction de la tangente à (D) menée du point (α, β) du lieu cherché; nous aurons

$$y - \beta = m(x - \alpha) \quad \text{ou} \quad y = mx + (\beta - m\alpha) \qquad (1)$$

pour l'équation de cette droite.

Or, cette droite (1) coupe (D) en des points dont les abscisses sont déterminées par

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2m(\beta - m\alpha)x + a^2[(\beta - m\alpha)^2 - b^2] = 0 \qquad (2);$$

et, comme (1) est tangente à (D), on doit avoir pour (2) des racines égales, donc

$$(a^2 - \alpha^2)m^2 + 2\alpha\beta m + (b^2 - \beta^2) = 0.$$

Ainsi, nous avons

$$m'm'' = \frac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2},$$

et, d'après l'énoncé du problème,

$$m'm'' = -\frac{b^2}{a^2},$$

d'où

$$-\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2};$$

et par suite

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = 2a^2b^2 \qquad (\varphi).$$

Donc, *le lieu est une ellipse ayant* $2a\sqrt{2}$ *et* $2b\sqrt{2}$ *pour axes, et semblable de forme et de position à* (D).

N. B. Le résultat (φ) précédent ne peut être applicable à l'hyperbole, puisque de deux diamètres conjugués de celle-ci, un seul rencontre la courbe.

PROBLÈME III.

Trouver le lieu de l'intersection des perpendiculaires abaissées des extrémités de l'axe transverse de l'ellipse, sur deux cordes supplémentaires *ou* deux diamètres conjugués.

Soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad \text{(D)}$$

la courbe directrice et m', m'' les directions de deux cordes supplémentaires *ou* de deux diamètres conjugués; nous avons d'une part

$$m'm'' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad (1),$$

et

$$\text{G)} \qquad y = -\frac{1}{m'}(x-a), \quad y = -\frac{1}{m''}(x+a) \qquad \text{(G}'$$

pour les génératrices du lieu.

Or, pour éliminer les constantes variables m' et m'' entre (1), (G) et (G'), il suffira de combiner (G) et (G') par voie de multiplication et de remplacer m' m'' par sa valeur : ces opérations effectuées, on obtient

$$b^2y^2 + a^2x^2 = a^4 \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire *une ellipse concentrique et semblable à la proposée*, et qui en tournant de 90° deviendrait alors homothétique à (D).

N. B. L'énoncé, modifié pour l'hyperbole, donnerait

$$b^2y^2 - a^2x^2 = -a^4;$$

et dans ce cas, comme dans le précédent, la directrice et le lieu cherché ont comme points communs les extrémités de l'axe des foyers de (D).

PROBLÈME IV.

Obtenir le lieu du sommet d'un angle dont un côté est un diamètre de l'ellipse et l'autre sa corde conjuguée passant par le foyer de droite.

L'axe transverse de la courbe et la corde conjuguée du foyer, donnent ce foyer comme point du lieu; l'autre axe ayant le premier pour corde correspondante, donne le centre. Enfin, si on considère le diamètre et la corde conjuguée, lorsque ces génératrices sont parallèles aux cordes supplémentaires formant l'angle *maximum* et *minimum*, on obtient deux points symétriques par rapport à l'axe transverse.

Ceci posé, soit l'ellipse directrice

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad \text{(D)};$$

nous aurons, pour les génératrices du lieu,

$$\text{G)} \qquad y = \delta x \quad \text{et} \quad y = m(x-c) \qquad \text{(G}';$$

avec la condition

$$m\delta = -\frac{b^2}{a^2} \qquad (1);$$

d'où, en éliminant m et p entre ces équations, il vient

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}\,x\,(x - c),$$

ou

$$a^2y^2 + b^2x^2 - b^2cx = 0 \qquad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu est une ellipse rapportée à l'axe transverse et à sa tangente au sommet de gauche.*

REMARQUE. En considérant le foyer de gauche, on aurait obtenu

$$a^2y^2 + b^2x^2 + b^2cx = 0 \qquad (\varphi_1).$$

Du reste (φ) et (φ_1) sont semblables à (φ) quant à la forme, mais elles ne sont point homothétiques.

N. B. Ce problème appliqué à l'hyperbole donnerait

$$a^2y^2 - b^2x^2 \pm b^2cx = 0 \qquad (\varphi) \text{ et } (\varphi'_1).$$

Exercices.

1° La portion de la normale comprise entre le point de contact et le grand axe est au demi-diamètre parallèle à la tangente comme le petit axe est au grand.

2° Si deux tangentes parallèles sont coupées par une troisième tangente, le demi-diamètre parallèle aux deux premières est moyen proportionnel entre les segments de celles-ci compris entre les points de contact et la troisième.

3° Étant donné un arc d'ellipse, achever la courbe.

4° Quel est le lieu des points de contact des tangentes aux ellipses ayant mêmes foyers sachant que ces tangentes sont parallèles ?

5° Une ellipse tourne autour de son centre, aux points où elle coupe une droite fixe on mène des tangentes à la courbe ; quel est le lieu du point d'intersection de ces tangentes ?

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'ELLIPSE.

XXXIVe & XXXVe LEÇON.

SOMMAIRE.

Ellipse rapportée à ses diamètres conjugués. Scolies I, II, III, IV. — Comparaison de l'équation aux axes et aux diamètres conjugués. Remarques I, II, III et IV. — Corde des contacts, pôle et polaire. — Construction de l'ellipse en coordonnées obliques et conjuguées. — Relations entre les axes, les diamètres conjugués et leurs inclinaisons mutuelles. Théorème I. Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de l'ellipse, est équivalent au rectangle des axes. — Théorème II. La somme des carrés de deux diamètres conjugués de l'ellipse vaut la somme des carrés de ses axes. Scolies. — Applications. — Exercices.

140. La définition des diamètres conjugués indique que, pris pour axes coordonnés, la forme de l'équation aux axes de l'ellipse ne sera pas altérée; mais il s'agit ici de déterminer les constantes géométriques de cette nouvelle équation et naturellement nous ferons usage de la méthode de la transformation des coordonnées.

Soient α et α' les angles formés par deux diamètres conjugués avec l'axe des foyers ; il faudra, pour prendre ces droites comme axes coordonnés, changer

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} x \cos.\alpha + y \cos.\alpha', \\ x \sin.\alpha + y \sin.\alpha', \end{matrix}\right.$$

dans l'équation aux axes de l'ellipse ; c'est-à-dire dans

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (E).$$

Or, cette substitution donne

$$(a^2\sin^2\alpha'+b^2\cos^2\alpha')y^2+2(a^2\sin\alpha\sin\alpha'+b^2\cos\alpha\cos\alpha')xy+(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)\,x^2=a^2b^2\,;$$

d'où, le rectangle des variables devant manquer dans cette transformée,

$$a^2 \sin.\ \alpha \sin.\ \alpha' + b^2 \cos.\ \alpha \cos.\ \alpha' = 0 \qquad (1),$$

et l'équation précédente devient

$$(a^2 \sin.^2 \alpha' + b^2 \cos.^2 \alpha')\, y^2 + (a^2 \sin.^2 \alpha + b^2 \cos.^2 \alpha)\, x^2 = a^2b^2.$$

Maintenant désignons par a' et b' les longueurs des demi-diamètres conjugués dirigés suivant X et Y ; nous aurons, en posant

$$\left.\begin{array}{l} y = 0, \\ x = 0, \end{array}\right\} \text{les relations} \left\{\begin{array}{ll} (a^2 \sin.^2 \alpha + b^2 \cos.^2 \alpha)\, a'^2 = a^2b^2 & (2), \\ (a^2 \sin.^2 \alpha' + b^2 \cos.^2 \alpha')\, b'^2 = a^2b^2 & (3) ; \end{array}\right.$$

et par suite l'équation, aux diamètres conjugués de l'ellipse, est

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \ldots. \qquad (E').$$

141. Scolies I. La relation (1) du § précédent peut s'écrire

$$\text{tg. } \alpha \text{ tg. } \alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad (1') ;$$

et nous retrouvons ce théorème que *deux diamètres conjugués sont parallèles à deux cordes supplémentaires*; et réciproquement : *deux diamètres parallèles à deux cordes supplémentaires sont conjugués.*

II. Toute valeur attribuée à α, détermine (1') une valeur convenable pour α' ; donc, *il existe une infinité de diamètres conjugués.*

III. *L'ellipse n'a que deux axes de symétrie.* En effet, pour que les nouvelles coordonnées soient également rectangulaires, il faut avoir

$$\alpha' = \alpha + 90^\circ, \quad \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \sin.\ \alpha' = \cos.\ \alpha, \\ \cos.\ \alpha' = -\sin.\ \alpha ; \end{array}\right.$$

et par suite (1) devient

$$(a^2 - b^2) \sin.\ \alpha \cos.\ \alpha = 0,$$

exigeant

$$\sin.\ \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \cos.\ \alpha = 0 ;$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 0, \quad = 180^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = 90^\circ, \quad = 270^\circ.$$

Ainsi géométriquement les axes coordonnés sont encore les anciens. C.Q.F.D.

IV. *L'ellipse a des diamètres conjugués égaux.* En effet, les relations (2) et (3) du § précédent donnent, pour $b' = a'$,

$$a^2 \sin.^2 \alpha' + b^2 \cos.^2 \alpha' = a^2 \sin.^2 \alpha + b^2 \cos.^2 \alpha,$$

d'où, en éliminant les *cos.*,

$$(a^2 - b^2)(\sin.^2 \alpha' - \sin.^2 \alpha) = 0;$$

et par suite

$$\sin.^2 \alpha = \sin.^2 \alpha' \quad \text{donc} \quad \cos.^2 \alpha = \cos.^2 \alpha',$$

et

$$\text{tg.}^2 \alpha = \text{tg.}^2 \alpha'.$$

Mais (1'), le produit tg. α tg. α' devant être négatif, il vient

$$\text{tg.}\,\alpha = +\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \text{tg.}\,\alpha' = -\frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \text{tg.}\,\alpha = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \text{tg.}\,\alpha' = +\frac{b}{a};$$

c'est-à-dire que *les diamètres conjugués égaux sont parallèles aux cordes supplémentaires formant entre elles les angles maximum et minimum,* ou *tracées des extrémités du grand axe à une des extrémités du petit axe.*

Enfin, en concevant l'ellipse rapportée à ses diamètres égaux, on obtient, en posant $b' = a'$ dans (E'),

$$y^2 + x^2 = a'^2 \qquad (E'');$$

c'est-à-dire *la forme de l'équation de la circonférence rapportée à deux diamètres rectangulaires.*

142. L'équation aux diamètres conjugués de l'ellipse étant

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \qquad (E')$$

ou de même forme que l'équation aux axes de la courbe, les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées seront communes aux axes et aux diamètres conjugués. Ainsi :

I. *Les carrés des ordonnées parallèles à un diamètre, sont proportionnels aux rectangles des segments qu'elles forment sur son conjugué.*

II. En désignant par α la direction de la tangente au point (x', y'); on aura

$$\alpha = -\frac{b'^2x'}{a'^2y'},$$

et pour cette tangente

$$a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2.$$

La sous-tangente sera

$$\frac{a'^2 - x'^2}{x'};$$

et, α' étant la direction du diamètre du point (x', y'),

$$\alpha\alpha' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

III. $y = mx + n$ représentant un système de cordes parallèles,

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2 m} x$$

sera le diamètre correspondant ; et, δ étant la direction de ce diamètre,

$$m\delta = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

IV. Enfin, pour les directions de deux diamètres conjugués, aussi bien que pour deux cordes supplémentaires quelconques,

$$\delta\delta' = -\frac{b'^2}{a'^2} \quad \text{et} \quad \gamma\gamma' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Corde des contacts. Pôle et Polaire.

143. Soit (x'', y'') les coordonnées du point de départ d'une tangente à l'ellipse

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \qquad \text{(E')},$$

et (x', y') le point de tangence ; nous aurons simultanément

$$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2 \quad \text{et} \quad a'^2y''y' + b'^2x''x' = a'^2b'^2$$

pour déterminer ce point (x', y') ; la seconde de ces relations exprimant que (x'', y'') est sur la tangente

$$a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2,$$

Or, la droite en (x', y')

$$a'^2y''y' + b'^2x''x' = a'^2b'^2 \quad \text{ou} \quad a'^2y''y + b'^2x''x = a'^2b'^2$$

n'est autre chose que la corde des contacts, et comme ses coordonnées à l'origine sont

$$Abscisse = \frac{a'^2}{x''} \quad \text{et} \quad Ordonnée = \frac{b'^2}{y''};$$

on en déduit *le théorème du pôle*

$$\left[x = \frac{a'^2}{x''}, \quad y = 0\right],$$

pour *la droite*

$$x = x'';$$

ou *le pôle*

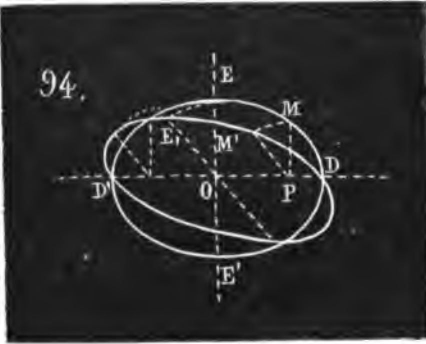
$$\left[x = 0 \quad y = \frac{b'^2}{y''}\right],$$

de *la polaire*

$$y = y''.$$

Construction de l'ellipse en coordonnées obliques.

144. La conformité des équations de l'ellipse rapportée à ses axes ou à ses diamètres conjugués, fait reconnaître que si $2a'$, $2b'$ et θ désignent deux diamètres conjugués et leur inclinaison, la construction de la courbe revient à prendre (fig. 94) $2a'$ et $2b'$ pour axes de symétrie d'une ellipse auxiliaire et d'incliner les ordonnées de cette dernière sur l'autre axe de θ, tout en conservant leurs longueurs, puis de réunir leurs extrémités par un trait continu.



Relations entre les axes, les diamètres conjugués et leurs inclinaisons.

145. Voici deux théorèmes remarquables :

THÉORÈME I.

Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de l'ellipse, est équivalent au rectangle des axes.

En effet, nous avons trouvé (§ 140)

$$a^2 \sin. \alpha \sin. \alpha' + b^2 \cos. \alpha \cos. \alpha' = 0 \qquad (1),$$

$$(2) \quad (a^2 \sin.^2\alpha + b^2 \cos.^2 \alpha)\, a'^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad (a^2 \sin.^2\alpha' + b^2 \cos.^2\alpha')\, b'^2 = a^2b^2 \quad (3);$$

d'où, en combinant (2) et (3) par voie de multiplication,

$$[a^4\sin.^2\alpha \sin.^2 \alpha' + a^2b^2 (\sin.^2\alpha \cos.^2 \alpha' + \sin.^2 \alpha' \cos.^2 \alpha) + b^4 \cos.^2 \alpha \cos.^2\alpha']\, a'^2b'^2 = a^4b^4.$$

Or, (1) élevé au carré, donnant

$$a^4 \sin.^2 \alpha \sin.^2 \alpha' + b^4 \cos.^2 \alpha \cos.^2 \alpha' = - 2a^2b^2 \sin. \alpha \cos. \alpha \sin. \alpha' \cos. \alpha',$$

on obtient, pour la relation précédente et après simplification,

$$(\sin.^2 \alpha' \cos.^2 \alpha - 2 \sin. \alpha \cos. \alpha \sin. \alpha' \cos. \alpha' + \sin.^2 \alpha \cos.^2 \alpha')\, a'^2b'^2 = a^2b^2;$$

ou, en extrayant la racine carrée.

$$a'b' \sin. (\alpha' - \alpha) = ab. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II.

Dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante et vaut la somme des carrés des axes.

En effet, de (2) on déduit

$$\sin.^2 \alpha = \frac{b^2 (a^2 - a'^2)}{a'^2 (a^2 - b^2)} \quad \text{et} \quad \cos.^2 \alpha = \frac{a^2 (a'^2 - b^2)}{a'^2 (a^2 - b^2)};$$

et par (3)

$$\sin.^2 \alpha' = \frac{b^2 (a^2 - b'^2)}{b'^2 (a^2 - b^2)} \quad \text{et} \quad \cos.^2 \alpha' = \frac{a^2 (b'^2 - b^2)}{b'^2 (a^2 - b^2)}.$$

Ces dernières valeurs se déduisent facilement des premières en y changeant a'^2 en b'^2.

Ceci posé, la relation (1) donne, après transposition d'un terme et élévation des deux membres au carré,

$$a^4 \sin.^2 \alpha \sin.^2 \alpha' = b^4 \cos.^2 \alpha \cos.^2 \alpha' ;$$

d'où, éliminant α et α',

$$a^4 \frac{b^4 (a^2 - a'^2) a^2 - b'^2)}{a'^2 b'^2 (a^2 - b^2)^2} = b^4 \frac{a^4 (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2)}{a'^2 b'^2 (a^2 - b^2)^2} ;$$

et par suite

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a'^2 - b'^2),$$

ou

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

146. SCOLIE. Les relations (1), (2) et (3) peuvent donc être remplacées par

$$\text{tg. } \alpha \text{ tg. } \alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad (1'),$$

$$a'b' \sin. (\alpha' - \alpha) = ab \qquad (2'),$$

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \qquad (3') ;$$

et ces dernières résolvent facilement toutes les questions relatives aux quantités a, b, a', b', α et α'; trois quelconques étant données.

Applications.

147. Voici quelques applications sur les études qui précèdent :

THÉORÈME I.

Les rectangles construits sur les segments de deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués d'une ellipse, sont proportionnels aux carrés des diamètres.

En effet, considérons l'ellipse

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2 \qquad \text{(E)}$$

rapportée aux diamètres conjugués considérés.

Soient (α, β) les coordonnées du point d'intersection de deux cordes parallèles à ces diamètres ; en y transportant l'origine, on obtient pour (E)

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 + 2a'^2 \beta y + 2b'^2 \alpha x + (a'^2 \beta^2 + b'^2 \alpha^2 - a'^2 b'^2) = 0 ;$$

et par suite, en posant $y = 0$, pour les segments x' et x'' de la corde située sur X,

$$x' x'' = \frac{a'^2 \beta^2 + b'^2 \alpha^2 - a'^2 b'^2}{b'^2} ;$$

et $x = 0$, donne, pour les segments confondus avec l'axe des Y,

$$y'y'' = \frac{a'^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 - a'^2b'^2}{a'^2}.$$

Donc

$$x'x'' : y'y'' :: \frac{a'^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 - a'^2b'^2}{b'^2} : \frac{a'^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 - a'^2b'^2}{a'^2} :: a'^2 : b'^2.$$

COROLLAIRE. Lorsque les diamètres conjugués sont égaux, on a

$$x'x'' = y'y'' \quad \text{ou} \quad x' : y' :: y'' : x'';$$

c'est-à-dire *que les extrémités de ces cordes sont situées sur une circonférence.*

N. B. Cette propriété est aussi commune à l'hyperbole, seulement *les segments de l'une des cordes peuvent être soustractifs.*

THÉORÈME II.

Le rectangle construit sur les segments d'une tangente à l'ellipse, compris entre le point de contact et deux diamètres conjugués, vaut le carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente (fig. 95).



Considérons l'ellipse

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$$

rapportée au diamètre du point M de contact et à son conjugué.

Ceci posé

$$x = a', \quad y = \delta x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b'^2}{a'^2\delta}x$$

seront les équations de la tangente MT, d'un diamètre OT et de son conjugué OT'; donc, *numériquement*, on a

$$\text{MT} = \delta a' \quad \text{et} \quad \text{MT}' = \frac{b'^2}{a'\delta};$$

et par suite

$$\text{MT.MT}' = b'^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. Cette propriété est commune à l'hyperbole.

THÉORÈME III.

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des origines de deux diamètres conjugués d'une ellipse sur un axe, vaut le carré de l'autre demi-axe; c'est-à-dire que l'on aura (fig. 96)

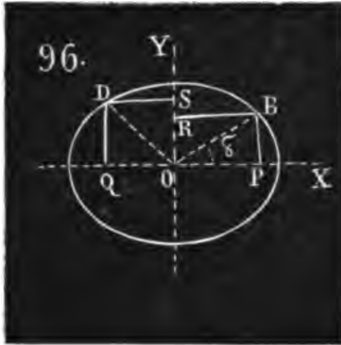
$$\text{BR}^2 + \text{DS}^2 = a^2 \quad et \quad \text{BP}^2 + \text{DQ}^2 = b^2.$$

En effet, considérons l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad \text{(E)},$$

et les deux diamètres conjugués

$$\text{OB)} \quad y = \delta x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b^2}{a^2\delta}x \quad \text{(OD}.$$



Or, (E) et (OB) d'une part, et (E) avec (OD) d'autre part, donnent

$$BR^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\delta^2 + b^2}, \quad DS^2 = \frac{a^4\delta^2}{a^2\delta^2 + b^2};$$

donc

$$BR^2 + DS^2 = \frac{a^2(b^2 + a^2\delta^2)}{a^2\delta^2 + b^2} = a^2. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On démontrerait de même que

$$BP^2 + DQ^2 = b^2.$$

N. B. Cette propriété appartient aussi à l'hyperbole, seulement un des diamètres étant imaginaire, il faut lui donner pour origine, le point distant du centre du coefficient de $\sqrt{-1}$ que contient son expression.

Théorème IV.

Le rectangle des distances aux deux axes de l'origine d'un diamètre de l'ellipse, vaut le rectangle des distances aux mêmes axes de l'origine de son conjugué; c'est-à-dire que l'on aura (fig. 96)

$$BP.\,BR = DQ.\,DS.$$

En effet, en conservant les mêmes désignations que dans le théorème précédent, on a

$$BR^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\delta^2 + b^2} \quad \text{d'où} \quad BP^2 = \frac{a^2b^2\delta^2}{a^2\delta^2 + b^2};$$

et par suite

$$BR.\,BP = \frac{a^2b^2\delta}{a^2\delta^2 + b^2}.$$

Si maintenant nous changeons δ en $-\frac{b^2}{a^2\delta}$ et que nous ne tenions compte que de la valeur numérique, nous aurons

$$DQ.\,DS = \frac{a^2b^2\delta}{a^2\delta^2 + b^2}.$$

Donc

$$BP.\,BR = DQ.\,DS. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. Ce théorème est aussi particulier à l'autre courbe à centre.

Théorème V.

Le rectangle des distances d'un sommet de l'ellipse à deux diamètres conjugués, vaut le rectangle des distances d'un autre sommet, non homologue, aux mêmes diamètres; c'est-à-dire que l'on aura (fig. 97)

$$BP.\,BQ = DP'.\,DQ'.$$

Au lieu de démontrer ce théorème directement, en cherchant les distances des sommets



B et D aux diamètres conjugués OX' et OY', nous ferons usage de la relation de condition

$$a^2 \sin.\alpha \sin.\alpha' + b^2 \cos.\alpha \cos.\alpha' = 0 \quad (1),$$

qui permet de passer de l'équation aux axes à celle aux diamètres conjugués OX' et OY'.

En effet

$$\left.\begin{array}{l} BP = a\sin.\alpha', \\ BQ = a\sin.\alpha; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{ BP.BQ = a^2\sin.\alpha\sin.\alpha'; \right.$$

puis

$$\left.\begin{array}{l} DP' = b\sin.DOP' = b\sin.(\alpha' - 90^\circ) = -b\cos.\alpha', \\ DQ' = b\sin.DOQ' = b\sin.(90^\circ - \alpha) = b\cos.\alpha; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{ DP'.DQ' = -b^2\cos\alpha\cos\alpha'. \right.$$

Donc, en substituant (§ 140) ces valeurs dans (1),

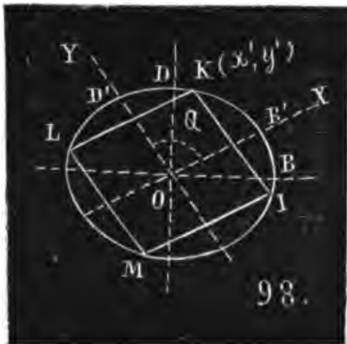
$$BP.\,BQ - DP'.\,DQ' = 0$$

ou

$$BP.\,BQ = DP'.\,DQ'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

PROBLÈME I.

Déterminer l'expression générale de la surface d'un parallélogramme inscrit dans une ellipse; et pour un système de diamètres conjugués parallèles à ses côtés, quel sera celui maximum (fig. 98).



Soit IKLM un parallélogramme inscrit et dont les côtés sont évidemment parallèles à un certain système de diamètres conjugués OB' et OD'; que nous choisirons pour axes coordonnés; donc

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \qquad (E)$$

sera l'ellipse donnée.

Si maintenant φ désigne l'angle de ces diamètres, nous aurons

$$IKLM = 4x'y' \sin.\varphi,$$

et, par suite de (E),

$$IKLM = \frac{4b'}{a'} \sin.\varphi.\sqrt{a'^2x'^2 - x'^4};$$

ou, pour obtenir le *maximum*,

$$IKLM = \frac{4b'}{a'} \sin.\varphi.\sqrt{\frac{a'^4}{4} - \left(x'^2 - \frac{a'^2}{2}\right)^2}.$$

Donc

$$x'^2 = \frac{a'^2}{2} \quad \text{ou} \quad x' = \frac{a'}{2}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{b'}{2}\sqrt{2}$$

donneront

$$maximum\ \text{IKLM} = 2a'b' \sin.\ \varphi = 2ab;$$

car

$$a'b' \sin.\ \varphi = ab.$$

Ainsi *ce maximum vaut la moitié de tout parallélogramme circonscrit à l'ellipse, et les côtés sont les diagonales des carrés construits sur les demi diamètres $2a'$ et $2b'$.*

REMARQUE. Si nous considérons le cas du losange, alors

$$y' = x',$$

d'où

$$\textit{Losange inscrit} = 4x'^2 \sin.\ \varphi\ ;$$

et, à cause de (E) et de $y' = x'$,

$$\textit{Losange inscrit} = \frac{4a'^2b'^2}{a'^2 + b'^2} \sin.\ \varphi.$$

Mais nous avons

$$a'b' \sin.\ \varphi = ab \quad \text{et} \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

donc

$$\textit{Losange inscrit} = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2) \sin.\ \varphi}.$$

Cherchons maintenant les valeurs extrêmes de la superficie de ce losange : en posant $\sin.\ \varphi = 1$ ou $\varphi = 90^\circ$, il vient

$$\text{MINIMUM } \textit{du losange inscrit} = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2};$$

c'est-à-dire le carré inscrit.

Quant au *maximum* de ce losange, comme il doit correspondre au *minimum* de φ, ou à $\varphi = \text{DBD}'$, on a

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\ \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos.\ \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

donc

$$\sin.\ \varphi = 2 \sin.\ \tfrac{1}{2}\ \varphi \cos.\ \tfrac{1}{2}\ \varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2};$$

et par suite

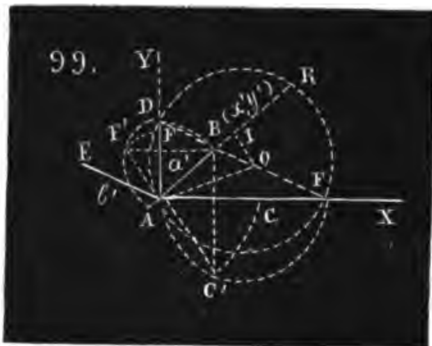
$$\text{MAXIMUM } \textit{losange inscrit} = 2ab,$$

ou le losange ayant pour sommets ceux de l'ellipse.

PROBLÈME II.

Construire avec la règle et le compas, les intersections d'une droite et d'une ellipse tangente aux milieux des quatre côtés d'un parallélogramme.

D'abord résolvons le problème suivant : **Construire les axes de l'ellipse connaissant, en grandeurs et en position, deux diamètres conjugués** (fig. 99).



Soient AB et AE les diamètres conjugués donnés : BF parallèle à AE sera la tangente en B.

Ceci posé, prolongeons AB de BR donné par

$$a' : b' :: b' : \mathrm{BR};$$

puis traçons la médiatrice IO perpendiculaire à AR, son intersection O avec la tangente BF sera *le centre d'une circonférence coupant* BF *en deux points* D *et* F *appartenant aux axes de l'ellipse*, qui seront donc AD et AF.

En effet, supposons que AF et AD soient les axes principaux pris comme axes coordonnés, la tangente en B aura pour équation

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2,$$

et, pour coordonnées à l'origine,

$$(1) \qquad \mathrm{AF} = \frac{a^2}{x'} \quad \text{et} \quad \mathrm{AD} = \frac{b^2}{y'} \qquad (2.$$

Le point O, milieu de DF, a pour coordonnées,

$$\left\{ \frac{a^2}{2x'},\ \frac{b^2}{2y'} \right\},$$

et comme

$$\mathrm{OA}^2 = \frac{a^4}{4x'^2} + \frac{b^4}{4y'^2};$$

le cercle précédent a pour équation

$$\left\{ x - \frac{a^2}{2x'} \right\}^2 + \left\{ y - \frac{b^2}{2y'} \right\}^2 = \frac{a^4}{4x'^2} + \frac{b^4}{4y'^2},$$

ou

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{x'}\,x - \frac{b^2}{y'}\,y = 0.$$

D'un autre côté la droite AB ou

$$y = \frac{y'}{x'}\,x,$$

coupe la circonférence à l'origine et au point

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a^2 + b^2}{x'^2 + y'^2}\,x' = \frac{a'^2 + b'^2}{a'^2}\,x' = x' + \frac{b'^2}{a'^2}\,x', \\ y &= y' + \frac{b'^2}{a'^2}\,y'. \end{aligned} \right\}$$

Ainsi, nous avons

$$\mathrm{BR}^2 = \left\{ y' - \left(y' + \frac{b'^2}{a'^2}\,y'\right) \right\}^2 + \left\{ x' - \left(x' + \frac{b'^2}{a'^2}\,x'\right) \right\}^2,$$

ou

$$BR^2 = \frac{b'^4}{a'^4}(y'^2 + x'^2) = \frac{b'^4}{a'^4}a'^2 = \frac{b'^4}{a'^2};$$

donc

$$BR = \frac{b'^2}{a'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Enfin, les équations (1) et (2) donnant

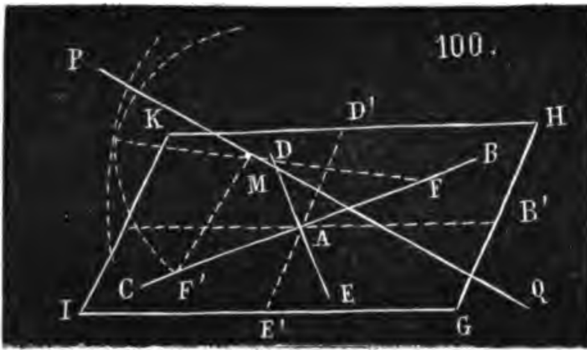
$$x' : a :: a : AF \quad \text{et} \quad y' : b :: b : AD,$$

on en déduit, par la figure,

$$a = AC' = AC \quad \text{et} \quad b = AF' = AF;$$

c'est-à-dire *deux sommets non homologues de l'ellipse.*

Reprenons maintenant notre problème primitif; et soit (fig. 100) IGHK le parallélogramme donné : les médiatrices B'C' et D'E' des côtés opposés constituent évidemment un système de diamètres conjugués, dont on peut déduire la position et la grandeur des axes BC et DE; et par suite les foyers F et F'.



Soit maintenant PQ la droite donnée : remarquons que, pour le point inconnu M, nous avons

$$FM + F'M = 2a = BC;$$

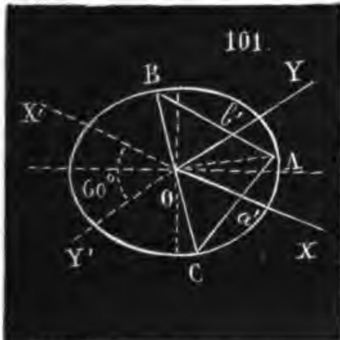
donc, *le point* M *sera le centre de la circonférence passant par le foyer* F' *et tangente au cercle ayant l'autre foyer* F *pour centre et* BC *pour rayon; le centre cherché étant du reste situé sur* PQ.

Ainsi le problème revient, après la construction des axes et des foyers, à la résolution d'un problème de géométrie élémentaire.

N. B. Tonte cette théorie est commune à l'hyperbole.

Problème III.

Inscrire un triangle équilatéral dans une ellipse donnée (fig. 101).



Supposons l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués OX et OY formant un angle de 60°, et traçons la bissectrice OA de l'angle YOX et le diamètre perpendiculaire BOC; ces droites auront pour équations

$$\text{OA)} \quad y = x \quad \text{et} \quad y = -x\ldots. \quad (\text{BC};$$

car BC est la bissectrice de YOX'.

Ceci posé, l'ellipse

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$$

donne, pour les coordonnées du point A,

$$\left\{ \frac{a'b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, \quad \frac{a'b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \right\};$$

et, pour celles du point (B),

$$\left\{ \frac{-a'b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, \quad \frac{a'b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \right\}.$$

Ainsi les droites AB et AC sont parallèles à OX et à OY, d'où

$$\text{BAC} = \text{YOX} = 60^\circ;$$

et par suite, de ce que les angles ABC et ACB sont égaux entre eux,

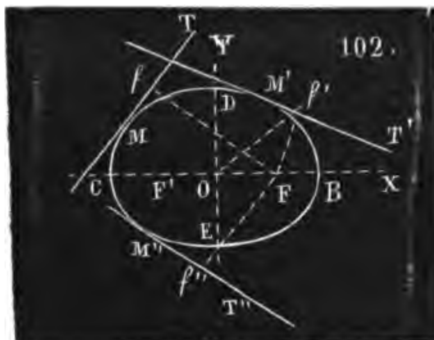
$$\text{ABC} = \text{ACB} = 60^\circ = \text{BAC}.$$

Donc, ABC est le triangle équilatéral demandé.

REMARQUE. Il est évident que la construction ne sera possible que pour 60° compris entre le *minimum* et *le maximum* de l'angle formé par deux diamètres conjugués de l'ellipse donnée (*ou* de deux cordes supplémentaires).

PROBLÈME IV.

Construire la courbe du second ordre connaissant trois tangentes et un foyer (fig 102).



Soient T, T', T'' et F les tangentes et le foyer donnés. D'abord les projections *f*, *f'* et *f''* du foyer sur les tangentes donnent trois points de la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre; donc, son centre O est celui de la courbe, et par suite le second foyer F' et les sommets B et C; puisque OB = O*f*, sera le rayon de ce cercle.

Les deux autres sommets D et E, distants de F de OB, se construisent facilement.

Quant aux points de contact M, M' et M'', le lecteur les construira facilement, en faisant usage du théorème du § 132.

N. B. Nous savons déjà que OF < OB correspond à l'ellipse, nous verrons plus loin que OF > OB *donnerait une hyperbole* et que si les projections *f*, *f'* et *f''* *étaient en ligne droite*, le lieu serait *une parabole*.

Exercices.

148. Voici quelques exercices que nous proposons au lecteur :

1° Parmi tous les systèmes de diamètres conjugués, la somme des axes est minimum et celle des diamètres conjugués égaux est maximum.

2° A partir d'un point quelconque d'une ellipse, on porte sur la normale une longueur

égale à $\frac{k^2}{p}$, k étant une constante et p la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente. Quel est le lieu de l'extrémité de cette droite?

3° La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués sur une droite fixe quelconque, est constante.

4° Quel est le lieu des sommets des rectangles maximum inscrits dans une série d'ellipses ayant mêmes foyers.

5° La circonférence décrite sur la portion du petit axe de l'ellipse, comprise entre la normale et la tangente au point (x', y') de la courbe, passe par les deux foyers.

6° Si par un point d'une ellipse, on lui mène une normale, le produit des segments faits sur cette droite, par le diamétre qui lui est perpendiculaire et par l'un des axes, est égal au carré de la moitié de l'autre axe.

7° Construire l'ellipse dont on connaît : un foyer, un point et les longueurs des axes; — un foyer, la longueur des axes et une tangente.

8° Dans toute ellipse la somme des carrés des valeurs inverses de deux diamètres se coupant rectangulairement, est constante et vaut la somme des carrés des valeurs inverses des axes.

N. B. *Ce théorème appartient également à l'hyperbole, toutefois en changeant les sommes en différences.*

9° Dans un cercle donné, roule, sans glissement, un autre cercle dont le rayon est deux fois plus petit. Quel est le lieu décrit par un point fixe, situé sur la direction d'un rayon donné du cercle mobile?

10° Si un cercle coupe une ellipse en quatre points, les bissectrices de l'angle des cordes communes sont parallèles aux axes de l'ellipse.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'HYPERBOLE.

XXXVIe LEÇON.

—

SOMMAIRE.

Formes diverses de l'équation de l'hyperbole. — Théorème. Les carrés des ordonnées de l'hyperbole, perpendiculaires à l'axe transverse, sont comme les produits des segments (soustractifs) qu'elles déterminent sur cet axe. — Des foyers. — Théorèmes I. La différence des distances d'un point de l'hyperbole aux deux foyers, est constante et égale à l'axe transverse. — II. Pour un point extérieur *ou* intérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux foyers est moindre *ou* supérieure à l'axe transverse $2a$. — III. Le demi-axe imaginaire de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les deux segments soustractifs dans lesquels chacun des foyers divise l'axe transverse. — Des directrices. — Problème. Quel est le lieu du point dont la différence des distances à deux points fixes est constante et égale à $2a$. — Construction ponctuée & continue de l'hyperbole.

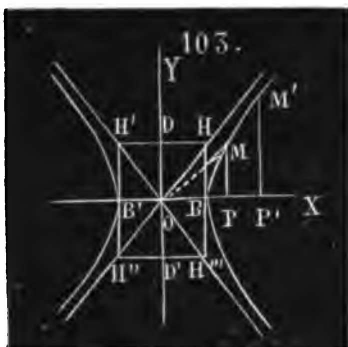
Formes diverses de l'équation de l'hyperbole.

149. L'hyperbole rapportée à ses axes a donné l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \qquad \text{(H)};$$

toutefois l'axe réel étant pris pour axe des X, on en déduit

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad (1).$$



Ici, $y = 0$ donne $x = \pm a$, c'est-à-dire les points B et B' (fig. 103); et quoique $x = 0$, donne $y = \pm b\sqrt{-1}$; on porte cependant sur l'axe des Y, $OD = OD' = b$ et on regarde $DD' = 2b$ comme *la longueur de l'axe imaginaire*.

Les points B et B' sont les plus rapprochés du centre : en effet, un point quelconque M fournit

$$OM^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - b^2.$$

Or (1) indique que x ne peut être *numériquement* inférieur à $\pm a$; et qu'à partir de cette limite, cette variable peut croitre jusqu'à $\pm \infty$; donc

$$\textit{minimum}\ OM = \pm a \quad \text{pour} \quad x = \pm a.$$

De même que dans l'ellipse, l'axe des X, désigné sous le nom d'*axe transverse* de l'hyperbole, est un axe de symétrie; et il en est de même pour l'*axe imaginaire* DD', dont la longueur $2b$ peut dépasser ici $BB' = 2a$.

Afin de construire facilement la courbe, il est urgent de déterminer d'abord ses asymptotes; c'est-à-dire les droites

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

qui sont précisément les diagonales HH'' et H'H''' du rectangle construit sur les axes de la courbe. De ce qui précède, on déduit facilement la forme tracée dans la figure ci-dessus.

Remarque. Les points B et B' de l'hyperbole en sont appelés les sommets.

180. En changeant dans (H) x en $x + a$, il vient

$$a^2y^2 = b^2(2ax + x^2) \qquad (H_1)$$

pour l'hyperbole rapportée à son axe transverse et à sa tangente au sommet B de droite.

N. B. L'hypothèse $b = a$, donne pour (H) et (H_1)

$$y^2 - x^2 = -a^2 \quad \text{et} \quad y^2 = 2ax + x^2;$$

c'est-à-dire *une hyperbole équilatère*, car les asymptotes sont alors rectangulaires.

Enfin, nous reconnaîtrons plus tard que cette spécialité d'hyperbole ayant *ses diamètres conjugués égaux*, on peut dire qu'*elle est parmi les hyperboles ce qu'est le cercle parmi les ellipses*.

N. B. De même que pour l'ellipse (§ 117), en posant

$$x = \pm a. \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad y = \pm b \frac{2t}{1-t^2},$$

on peut calculer, sans extraire aucune racine carrée, les coordonnées de tous les points de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad (H);$$

car ces valeurs de x et y vérifient (H) et en faisant croître t de 0 à 1, x varie de a jusqu'à ∞ et y de 0 à ∞.

THÉORÈME.

181. *Les carrés des ordonnées de l'hyperbole, perpendiculaires à l'axe transverse, sont comme les produits des segments* (soustractifs) *qu'elles déterminent sur cet axe* (fig. 103).

En effet, nous avons

$$\left.\begin{array}{l} a^2y^2 = b^2(x^2 - a^2), \\ a^2y'^2 = b^2(x'^2 - a^2), \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{ \frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a^2}; \right.$$

et par suite, pour les points M et M',

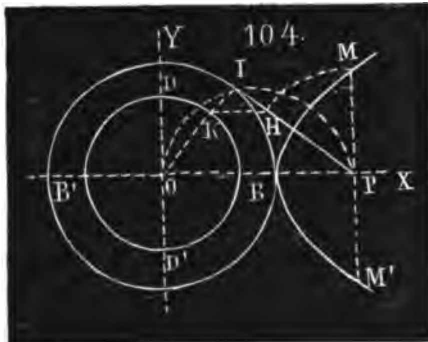
$$\frac{\text{MP}^2}{\text{M'P'}^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x'-a)(x+a)} = \frac{\text{BP. B'P}}{\text{BP'. B'P'}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

182. REMARQUE. Les équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

indiquent que l'on passe de la première à la seconde en changeant b^2 en $-b^2$, *ou* b en $b\sqrt{-1}$; c'est-à-dire que *les propriétés de l'ellipse, indépendantes de* **b**, *seront communes à l'hyperbole.*

Description pointillée de l'hyperbole.



183. L'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

donne *numériquement*

$$a : b :: \sqrt{a^2 - x^2} : y.$$

Donc (fig. 104), si sur une abscisse quelconque OP, nous décrivons une demi-circonférence, la corde IP, déterminée par son intersection avec le cercle ayant BB' = $2a$ pour diamètre, sera

$$\text{IP} = \sqrt{x^2 - a^2};$$

puis traçant KH parallèle à OP, par l'intersection de OI avec la circonférence décrite sur DD' $= b$, nous aurons

$$OI \text{ ou } a : OK \text{ ou } b :: PI \text{ ou } \sqrt{x^2 - a^2} : PH;$$

c'est-à-dire que

$$PH = y.$$

Ainsi, il suffira de rapporter PH sur PM perpendiculaire à OX pour obtenir le point M correspondant à l'abscisse OP et ainsi des autres.

N. B. Le lecteur comprendra facilement qu'une droite limitée ne pourra jamais décrire toute l'hyperbole, puisque cette courbe admet des branches infinies ; mais la théorie des foyers nous donnera bientôt le moyen de tracer, par un mouvement continu, une portion limitée d'hyperbole.

Des foyers.

184. En appliquant la théorie générale des foyers et des directrices à l'ellipse rapportée à ses axes, nous avons reconnu que cette courbe possédait deux foyers situés sur le grand axe et symétriques par rapport au centre ; et que pour chacun la directrice correspondante était perpendiculaire au même axe et que la distance d'un foyer à un point de la courbe était une fonction linéaire rationnelle et entière de l'abscisse *ou* de l'ordonnée de ce dernier point, suivant que le grand axe était celui des X *ou* des Y. Or, il est évident qu'on obtiendrait des résultats analogues pour l'hyperbole, seulement l'axe transverse de cette courbe doit remplacer celui *maximum* de l'ellipse ; mais afin de diversifier les moyens d'investigation, nous allons chercher directement *le point dont la distance à un point de l'hyperbole serait une fonction linéaire, rationnelle et entière de l'abscisse de ce dernier point.*

Soit (x', y') le foyer inconnu ; nous aurons, pour sa distance à un point (x, y) de l'hyperbole rapportée à ses axes,

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2.$$

Or, l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

donnant

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

on obtient

$$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \mp 2\frac{b}{a}y'\sqrt{x^2 - a^2} + y'^2.$$

Mais δ devant être rationnel, on doit avoir

$$y' = 0$$

pour faire disparaître le radical que contient δ^2 ; c'est-à-dire que le foyer est situé sur l'axe transverse.

Ainsi, il ne reste plus qu'à exprimer que

$$\delta^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - 2x'x + (x'^2 - b^2)$$

est une expression carré parfait : à cet effet, posons

$$4x'^2 - 4\frac{a^2 + b^2}{a^2}(x'^2 - b^2) = 0,$$

d'où

$$x' = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Donc, l'*hyperbole*, comme l'ellipse, *possède deux foyers situés sur l'axe transverse et symétriquement placés par rapport au centre;* et leur construction résulte évidemment de l'intersection de cet axe avec la circonférence circonscrite au rectangle formé avec les axes $2a$ et $2b$.

La distance des foyers de l'hyperbole, ordinairement désignée par $2c$, s'appelle l'*excentricité* de la courbe.

THÉORÈME I.

La différence des distances d'un point de l'hyperbole aux deux foyers, est constante et égale à l'axe transverse. (fig. 105)

En effet, les valeurs de x' donnent

$$\delta^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 \mp 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} \mp a\right)^2,$$

d'où

$$\delta = \pm\left(\frac{cx}{a} \mp a\right);$$

et en séparant

$$\left.\begin{array}{l} \delta = \pm\left(\dfrac{cx}{a} - a\right), \\ \delta = \pm\left(\dfrac{cx}{a} + a\right), \end{array}\right\} \text{ pour le foyer } \left\{\begin{array}{l} \text{F, } \textit{de droite;} \\ \text{F}', \textit{ de gauche.} \end{array}\right.$$

De plus, si nous remarquons que l'on a $c : a > 1$; nous aurons, pour un point M situé sur la branche de la courbe, correspondant au foyer F de droite et F' désignant l'autre foyer,

$$\left.\begin{array}{l} \text{FM} = \dfrac{cx}{a} - a, \\ \text{F'M} = \dfrac{cx}{a} + a, \end{array}\right\} \text{ d'où } \text{F'M} - \text{FM} = 2a;$$

et pour un point M′, situé sur l'autre branche de l'hyperbole,

$$\left.\begin{aligned} FM' &= -\frac{cx}{a} + a, \\ F'M' &= -\frac{cx}{a} - a, \end{aligned}\right\} \text{ d'où } FM' - F'M' = 2a. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME II.

Pour un point extérieur ou *intérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux foyers est moindre* ou *supérieure à l'axe transverse 2a.*



En effet, pour N extérieur, nous avons (fig. 105)

$$F'M > F'N - MN,$$

d'où

$$F'M - FM > F'N - MN - FM;$$

et par suite

$$F'N - FN < 2a. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

En considérant un point intérieur N′ :

$$F'N' > F'M - MN';$$

d'où

$$F'N' - FN' > F'M - MN' - FN' \text{ ou } 2a. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME III.

Le demi-axe imaginaire de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les deux segments soustractifs, dans lesquels chacun des foyers divise l'axe transverse.

En effet, on a (fig. 105)

$$\left.\begin{aligned} BF &= OF - OB = c - a, \\ B'F &= OF + OB' = c + a; \end{aligned}\right\} \text{ d'où } BF.B'F = c^2 - a^2 = b^2. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Des directrices.

125. De même que pour les foyers, cherchons directement une droite

$$Ay + Bx + C = 0$$

telle que *le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à cette droite soit constant.*

Or, nous avons d'une part, en considérant le foyer F et un point situé sur la branche correspondante de la courbe

$$\delta = \frac{cx}{a} - a = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right);$$

et d'autre part, pour la distance de ce point à la droite précitée,

$$\delta' = \frac{Ay + Bx + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left\{ \frac{A}{B} y + x + \frac{C}{B} \right\}.$$

Mais en posant

$$\frac{A}{B} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{C}{B} = -\frac{a^2}{c},$$

on en déduit

$$A = 0 \quad \text{et} \quad C = -\frac{a}{c} B;$$

d'où

$$\delta : \delta' :: \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right) : x - \frac{a^2}{c} :: c : a.$$

Ainsi

$$x - \frac{a^2}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a^2}{c}$$

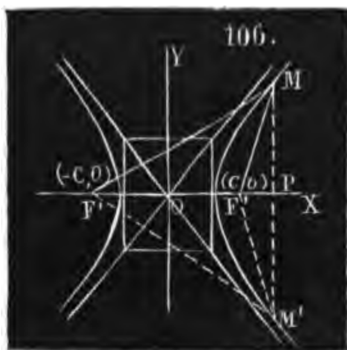
est la *directrice* donnée par le foyer F de droite; et on aurait

$$x = -\frac{a^2}{c}$$

pour celle correspondante au foyer F' de gauche.

PROBLÈME.

Quel est le lieu du point dont la différence des distances à deux points fixes est constante et égale à 2a.



Soient (fig. 106) F, F' les points donnés et $2c$ leur distance, on doit avoir pour un point M du lieu

$$F'M - FM = 2a \qquad (1).$$

De même que pour l'ellipse et pour les mêmes motifs, nous prendrons FF' pour axe des X et sa médiatrice perpendiculaire OY pour celui des ordonnées; alors, il vient

$$\text{(G)} \qquad F'M^2 = y^2 + (x + c)^2 \quad \text{et} \quad FM^2 = y^2 + (x - c)^2 \qquad \text{(G')},$$

et l'élimination des constantes variables FM et F'M, entre (1) et les génératrices circulaires (G) et (G'), donnera l'équation du lieu demandé.

Or, (G) et (G') donnent, par voie de soustraction,

$$F'M^2 - FM^2 = 4cx \quad \text{ou} \quad F'M + FM = \frac{2cx}{a} \qquad (2),$$

après avoir réduit au moyen de (1).

Si maintenant nous combinons (1) et (2), nous obtenons

$$F'M = \frac{cx}{a} + a \quad \text{et} \quad FM = \frac{cx}{a} - a,$$

pour M situé à droite de OY ; et

$$F'M = -\frac{cx}{a} - a \quad \text{avec} \quad FM = -\frac{cx}{a} + a,$$

pour M à gauche de OY ; car dans ce cas (1) et (2) auraient été

$$F'M - FM = -2a \quad \text{et} \quad F'M + FM = -\frac{2cx}{a}.$$

Enfin, en remplaçant dans (G) *ou* (G') F'M *ou* FM par sa valeur, on obtient

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)\,x^2 = -a^2\,(c^2 - a^2).$$

Or, les conditions du problème indiquent que l'on a

$$FF' > F'M - FM \quad \text{ou} \quad 2c > 2a,$$

donc

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

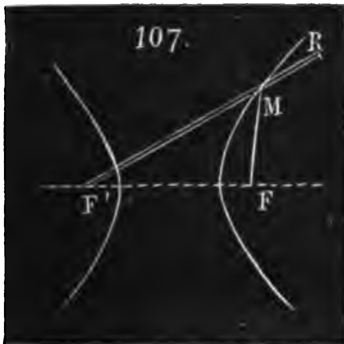
et par suite

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad \text{(H)}.$$

Ainsi le lieu demandé est *une hyperbole ayant* F *et* F' *pour foyers*, 2a *pour axe transverse et* 2c *pour excentricité*.

Construction ponctuée et continue d'une portion d'hyperbole.

186. La première résulte des intersections de couples de circonférences dont les foyers sont les centres et dont les rayons ont 2a pour différence.



Quant à la description continue d'une portion d'hyperbole : on fixe (fig. 107) l'extrémité d'une règle F'R à l'un des foyers F', puis on attache à l'autre extrémité R et au second foyer F les bouts d'un cordeau ayant pour longueur

$$F'R - 2a$$

pour décrire la branche du foyer F.

En effet, si on fait pivoter la règle autour de F' et qu'au moyen d'un style on tende le cordeau le long de la règle ; on aura,

pour une station de la règle,

$$F'M = F'R - RM \quad \text{et} \quad FM = \text{cordeau} - RM,$$

d'où

$$F'M - FM = F'R - \text{cordeau} = 2a. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

N. B. Le lecteur saisira facilement que

$$\textit{cordeau} = F'R + 2a$$

permettra de décrire la branche du foyer F' sans changer le pivot F' de la règle ; et qu'en conservant la première hypothèse, il faudrait prendre F pour pivot pour obtenir cette seconde branche de la courbe.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'HYPERBOLE.

XXXVIIe & XXXVIIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

De la tangente. — Asymptotes. — Théorèmes I. Les points de la tangente à l'hyperbole, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe. — II. Aux extrémités de l'axe transverse de l'hyperbole, les tangentes sont perpendiculaires aux diamètres du point de contact. — III. Les tangentes aux extrémités d'un diamètre de l'hyperbole, sont parallèles. — IV. Dans l'hyperbole, le produit des directions, par rapport aux axes de la courbe, d'une tangente et du diamètre du point de contact, est constant. — V. La soustangente sur un axe de l'hyperbole, est indépendante de l'autre axe. — Tangente par un point quelconque. — De la normale et de la sous-normale. — Normale par un point quelconque. — Relations angulaires entre la tangente, les rayons vecteurs du point de contact et la normale. — Construction, au moyen des foyers, de la tangente en un point de l'hyperbole. — Lieu de la projection du foyer de l'hyperbole, sur sa tangente. — Construction de la tangente, par un point extérieur. — Applications développées. — Exercices.

De la tangente.

137. Désignons par α la direction de la tangente au point (x', y') de l'hyperbole, nous aurons

$$y - y' = \alpha (x - x') \quad \text{ou} \quad y = \alpha x + (y' - \alpha x') \qquad (1).$$

Si maintenant nous éliminons y entre (1) et l'équation de la courbe

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad (H);$$

il vient

$$(a^2\alpha^2 - b^2)\,x^2 + 2a^2\alpha\,(y' - \alpha x')\,x + a^2\,[(y' - \alpha x')^2 + b^2] = 0$$

pour les abscisses des points d'intersection de (1) et (H); mais, ces lignes étant tangentes, les valeurs de x doivent être égales, donc

$$a^4\alpha^2\,(y' - \alpha x')^2 - (a^2\alpha^2 - b^2)\,a^2\,[(y' - \alpha x')^2 + b^2] = 0;$$

et par suite, pour déterminer α,

$$(x'^2 - a^2)\,\alpha^2 - 2x'y'.\alpha + (y'^2 + b^2) = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{x'y' \pm \sqrt{a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2}}{x'^2 - a^2} \qquad (\alpha).$$

Mais de

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2 \quad \text{on déduit} \quad (x'^2 - a^2)\,b^2 = a^2y'^2;$$

et, le radical de (α) étant nul,

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'};$$

d'où, en substituant dans (1) et réduisant,

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2 \qquad (T).$$

N. B. La formule (α) qui se réduit à une seule valeur pour le point (x', y') sur l'hyperbole, admet *deux* ou *zéro* valeurs réelles suivant que le point (x', y') est *extérieur* ou *intérieur* à la courbe, car pour ces deux cas, on a

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2 \gtrless 0.$$

N. B. De même (§ 128 *bis.*) que pour l'ellipse, le lecteur déduira facilement que

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

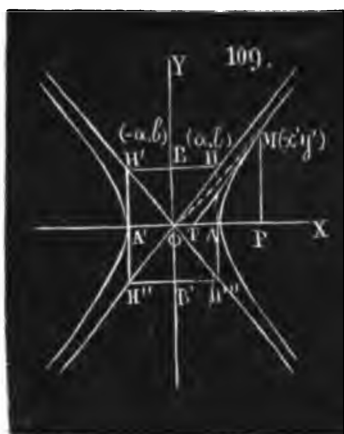
sera la tangente à l'hyperbole, lorsque m sera la direction de cette droite; toutefois une restriction se présente ici. En effet, le problème ne sera possible que pour

$$-\frac{b}{a} \overset{=}{<} m \overset{=}{<} \frac{b}{a};$$

c'est-à-dire que m doit être compris entre ces valeurs extrêmes, ou leur être égale. Ces valeurs extrêmes sont les directions des asymptotes (§ 158).

Variations de l'inclinaison de la tangente sur l'axe.

158. La direction de la tangente est infinie aux sommets A et A' de l'hyper-



bole, car pour ces points $x' = \pm a$ et $y' = 0$; donc, aux extrémités de l'axe transverse, les tangentes sont normales à cet axe (fig. 109).

Asymptotes.

189. Lorsque le point de contact s'éloigne de plus en plus des sommets A et A', la valeur de α s'approche de

$$\frac{\infty}{\infty},$$

qu'on obtient, en posant analytiquement $x' = \infty$ et $y' = \infty$. Or, pour déterminer la véritable valeur de ce symbole, éliminons de α la variable x' au moyen de la fonction hyperbolique

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2.$$

Cette substition de x', en fonction de y', donne

$$\alpha = \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 + \frac{b^2}{y'^2}};$$

et par suite, en posant $y' = \infty$,

$$\textit{limite}\ \alpha = \pm \frac{b}{a}.$$

C'est-à-dire que *la tangente est parallèle aux diagonales du rectangle des axes.*

D'un autre côté, la tangente

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2$$

donnant, pour son abscisse à l'origine,

$$y = 0, \quad x = \frac{a^2}{x'} = \text{OT};$$

on en déduit

$$\textit{limite}\ \text{OT} = 0,$$

pour le point de contact situé à l'infini.

Ainsi, *les diagonales* HH'' *et* H'H''' *sont des tangentes* : en effet, ce sont les asymptotes de l'hyperbole.

N. B. Dans l'hyperbole équilatère, on obtient

$$y = \pm x,$$

puisque $a = b$; c'est-à-dire que *les asymptotes sont rectangulaires.*

THÉORÈME I.

Les points de la tangente à l'hyperbole, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe.

La forme de l'équation de l'hyperbole ne permet pas l'emploi de la méthode usitée pour le cercle et l'ellipse ; aussi faut-il ici déterminer directement le calcul du trinôme

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2,$$

pour un point quelconque (x, y) de la tangente

$$a^2yy' - b^2xx' = - a^2b^2 \qquad (T).$$

A cet effet, nous déduisons de (T)

$$ay = \frac{b^2(xx' - a^2)}{ay'},$$

d'où

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = \frac{b^4(xx' - a^2)^2}{a^2y'^2} - b^2x^2 + a^2b^2 = \frac{b^2}{a^2y'^2}\left\{ b^2(xx' - a^2)^2 - a^2y'^2(x^2 - a^2) \right\};$$

et, par suite de

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2,$$

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = \frac{b^4(x - x')^2}{y'^2} > 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II.

Aux seules extrémités de l'axe transverse de l'hyperbole, les tangentes sont perpendiculaires aux diamètres du point de contact.

En effet, désignons par V l'angle formé par une tangente et le diamètre du point de contact, nous avons

$$\text{tg. V} = \frac{\alpha - \delta}{1 + \alpha\delta},$$

δ étant la direction du diamètre; puis, remplaçant α et δ par leurs valeurs

$$\frac{b^2x'}{a^2y'} \quad \text{et} \quad \frac{y'}{x'},$$

il vient

$$\text{tg. V} = \frac{- a^2y'^2 + b^2x'^2}{(a^2 + b^2)\,x'y'}.$$

Mais on a

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

donc

$$\text{tg. V} = \frac{a^2b^2}{c^2x'y'}.$$

Ainsi tg. V ne devient ∞ que pour $y' = 0$ et $x' = 0$; mais la seconde hypo-

thèse est inadmissible, car on doit avoir *numériquement*

$$x' \overset{=}{>} a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME III.

Les tangentes aux extrémités d'un diamètre de l'hyperbole sont parallèles.

En effet, nous avons pour la direction de la tangente en (x', y')

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'};$$

et pour celle de l'autre extrémité $(-x', -y')$ du diamètre, passant par le premier point de contact,

$$\alpha' = \frac{b^2(-x')}{a^2(-y')} = \frac{b^2x'}{a^2y'};$$

donc

$$\alpha = \alpha'..... \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME IV.

Dans l'hyperbole, le produit des directions, par rapport aux axes, d'une tangente et du diamètre du point de contact, est constant.

La tangente au point (x', y') donne

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'},$$

et comme le diamètre du même point a pour direction

$$\delta = \frac{y'}{x'},$$

on déduit de ces valeurs

$$\alpha\delta = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Sous-tangente.

160. La sous-tangente sur un axe, est la projection sur cet axe de la portion de la tangente comprise entre le point de contact et le point où cette droite rencontre l'axe.

THÉORÈME.

La sous-tangente sur un axe de l'hyperbole, est indépendante de cet axe.

En effet, de la tangente

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2,$$

on déduit, pour l'abscisse à l'origine,

$$\frac{a^2}{x'}.$$

Donc

$$\textit{sous-tangente} = x' - x = x' - \frac{a^2}{x'} = \frac{x'^2 - a^2}{x'} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

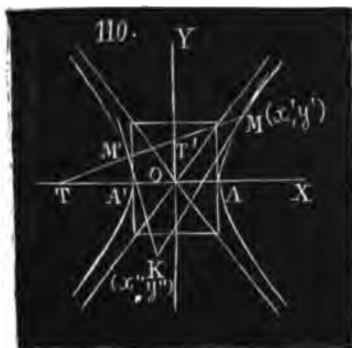
Tangente par un point quelconque. — Corde des contacts.

161. Soit (x'', y'') le point d'où il faut mener une tangente à l'hyperbole (fig. 110)

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$$

nous aurons, pour déterminer le point de contact (x', y'),

$$1) \quad a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2y''y' - b^2x''x' = -a^2b^2 \quad (2.$$



Or, au lieu d'opérer comme dans le problème analogue pour l'ellipse et qui nous conduirait à des résultats semblables; il est préférable, au point de vue de la variété des méthodes, de construire les lieux (1) et (2) en (x', y'), et comme (1) est l'hyperbole donnée, tout se réduit à fixer la droite *(corde des contacts)* donnée par la seconde de ces équations. A cet effet, posons

$$\left.\begin{aligned} y' &= 0, \\ x' &= 0, \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{a^2}{x''} = \text{OT}; \\ y' &= \frac{-b^2}{y''} = \text{OT}', \end{aligned}\right.$$

et par suite, en joignant TT', on aura les points de contact M et M' des tangentes demandées, lesquelles seront KM et KM'.

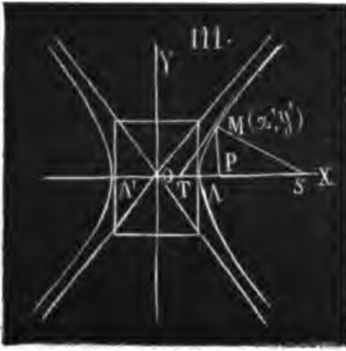
N. B. Cette construction analytique des tangentes aux courbes du second ordre, présente cependant l'inconvénient de ne point donner les conditions d'existence de ces droites, à moins de *qualifier* la droite (1) par rapport à l'hyperbole (2), ce qui ferait retomber dans le procédé suivi pour l'ellipse.

Enfin, nous reviendrons encore sur *cette méthode de la corde des contacts*, lorsque nous traiterons de l'hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués.

De la normale & de la sous-normale.

162. La *normale* au point (x', y') de la courbe

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$



étant perpendiculaire à la tangente au point de contact, nous aurons

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \quad \text{(N)}.$$

Cette relation nous donne pour l'abscisse à l'origine (fig. 111)

$$x = \text{OS} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}x' = \frac{c^2}{a^2}x';$$

d'où, pour $x' = \pm a$,

$$\textit{minimum numérique de } \text{OS} = \frac{c^2}{a} > c.$$

Ainsi le point S n'est jamais situé entre les foyers F *et* F'.

Quant à la *sous-normale* sur l'axe transverse, il vient

$$\text{PS} = \text{OS} - \text{OP} = \frac{c^2}{a^2}x' - x' = \frac{c^2 - a^2}{a^2}x' = \frac{b^2}{a^2}x',$$

donnant, pour $x' = \pm a$

$$\textit{minimum numérique de } \text{PS} = \frac{b^2}{a};$$

ou *la demi-corde conjuguée de l'axe et passant par un foyer*. Cette demi-corde est souvent appelée *le demi-paramètre de l'axe*.

Normale par un point quelconque. — Hyperbole équilatère du pied des normales.

162 (bis). Soit (x'', y'') le point donné et (x', y') le pied de la normale ; nous aurons

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'),$$

et, comme cette droite doit passer par (x'', y''),

$$y'' - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x'' - x'),$$

ou

$$y'' - y = -\frac{a^2y}{b^2x}(x'' - x);$$

d'où, en développant,

$$(a^2 + b^2)xy - a^2x''y - b^2y''x = 0 \quad \text{(H)}$$

sera un lieu [évidemment *hyperbole équilatère* passant par le centre de l'hyperbole donnée et par le point donné (x'', y'')] qui, par son intersection avec l'hyperbole, donnera les pieds des normales demandées.

Ainsi, *on pourra*, EN GÉNÉRAL, *tracer quatre normales* du point (x'', y'').

N. B. Si le point (x'', y'') est sur un des axes, par exemple $y''=0$, il vient

$$c^2xy - a^2x''y = 0,$$

d'où

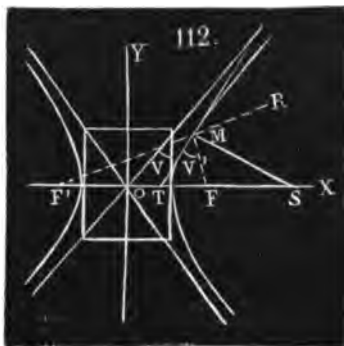
$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{a^2x''}{c^2};$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, *l'hyperbole équilatère* (H) *se réduit à ses asymptotes.*

Relations angulaires entre la tangente, les rayons vecteurs & la normale.

THÉORÈME.

163. *La tangente de l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs menés des foyers au point de contact.*



En désignant par α, δ et δ' les directions de la tangente au point M et des rayons vecteurs FM et F'M; nous avons (fig. 112)

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'}, \quad \delta = \frac{y'}{x'-c} \quad \text{et} \quad \delta' = \frac{y'}{x'+c};$$

d'où

$$\text{tg. V}' = \frac{\dfrac{y'}{x'-c} - \dfrac{b^2x'}{a^2y'}}{1 + \dfrac{b^2x'y'}{a^2y'(x'-c)}} = \frac{a^2y'^2 - b^2x'^2 + b^2cx'}{(a^2+b^2)x'y' - a^2cy'} = \frac{b^2(cx'-a^2)}{cy'(cx'-a^2)} = \frac{b^2}{cy'},$$

$$\text{tg. V} = \frac{\dfrac{b^2x'}{a^2y'} - \dfrac{y'}{x'+c}}{1 + \dfrac{b^2x'y'}{a^2y'(x'+c)}} = \frac{b^2x'^2 - a^2y'^2 + b^2cx'}{(a^2+b^2)x'y' + a^2cy'} = \frac{b^2(cx'+a^2)}{cy'(cx'+a^2)} = \frac{b^2}{cy'};$$

toutefois après avoir réduit au moyen des relations hyperboliques

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Donc

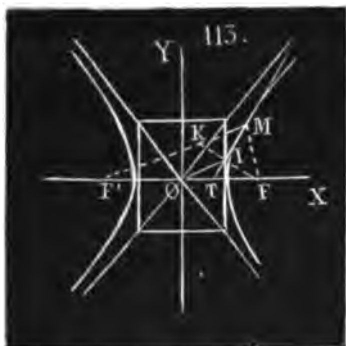
$$\text{tg. V} = \text{tg. V}' \quad \text{et par suite} \quad \text{V} = \text{V}'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. *La normale de l'hyperbole est bissectrice de l'angle formé par un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre.*

En effet, les angles FMS et SMR sont complémentaires de V et V', et comme

$$V = V' \quad \text{on a} \quad FMS = SMR \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Construction, par les foyers, de la tangente en un point de l'hyperbole.



164. Sur le rayon vecteur *maximum* F'M (fig. 113) du point de contact donné, prenons MK = MF; MI perpendiculaire à FK sera la tangente demandée.

En effet, MI est la bissectrice de l'angle F'MF, puisque le triangle MKF est isocèle par construction.

Lieu de la projection d'un foyer de l'hyperbole sur sa tangente.

165. Soit I (fig. 113) la projection du foyer F sur la tangente TM; prolongeons FI jusqu'à son intersection K avec le rayon vecteur F'M mené de l'autre foyer au point de contact M : l'égalité des angles IMF et IMK donne

$$MF = MK;$$

et par suite le point I est le milieu de FK, donc

$$2OI = F'K = F'M - MK = F'M - FM = 2a;$$

d'où

$$OI = a.$$

Ainsi, comme pour l'ellipse, le lieu cherché *est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre.*

COROLLAIRE. *Les projections du foyer sur les asymptotes sont les intersections de ces droites avec le cercle précédent.*

N. B. La solution analytique de ce problème s'obtiendrait comme dans l'ellipse ou, du reste, il suffirait de changer b^2 en $-b^2$.

Construction de la tangente à l'hyperbole par un point extérieur.

166. Du point T donné (fig. 114) comme centre, avec TF comme rayon, décrivons une circonférence, puis de l'autre foyer avec $2a$ traçons un second cercle; soit K leur intersection : le rayon vecteur F'K donnera le point de contact M de la tangente TM demandée.

En effet, de

$$\left.\begin{aligned} F'M - FM &= 2a, \\ F'M - MK &= 2a, \end{aligned}\right\} \quad \text{on déduit} \quad MF = MK.$$



Mais, par construction,

$$TF = TK;$$

donc, TM perpendiculaire au milieu de KF est la bissectrice de l'angle KMF, et par suite c'est la tangente en M.

Du reste, pour un point P de TM, autre que M, on a

$$F'K > F'P - PK \quad \text{ou} \quad 2a > F'P - PF;$$

donc, le point P est bien extérieur à l'hyperbole. C Q. F. D.

DISCUSSION I. *Le point* T *est extérieur à l'hyperbole* : on a

$$TF' - TF < 2a \quad \text{ou} \quad TF' < 2a + TF.$$

D'un autre côté, le triangle TFF' donne

$$TF' > FF' - TF \quad \text{et } \textit{à fortiori} \quad TF' > 2a - TF.$$

Ainsi les deux circonférences *se couperont* en deux points K et K', et détermineront *deux tangentes*.

II. *Le point* T *est sur la courbe* : alors

$$TF' - TF = 2a \quad \text{ou} \quad TF' = 2a + TF;$$

donc les deux cercles seront *tangents extérieurement;* et par suite *une tangente unique*.

III. Enfin T *intérieur à l'hyperbole* donne

$$TF' - TF > 2a \quad \text{ou} \quad TF' > 2a + TF;$$

et les circonférences *extérieures*, indiquent *zéro* solution.

167. Les théories précédentes nous permettront de développer quelques applications.

Applications.

THÉORÈME I.

La projection d'un foyer sur l'asymptote est sur la directrice correspondant à ce foyer.

En effet, nous avons

$$x = \frac{a^2}{c},$$

pour l'abcisse de la projection du foyer (c, o) de droite sur les asymptotes

$$y = \pm \frac{b}{a} x;$$

car la droite projetante de ce foyer est

$$y = \mp \frac{a}{b}(x - c).$$

THÉORÈME II.

La distance d'un foyer à une asymptote vaut le demi-axe imaginaire.

En considérant l'asymptote

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{ou} \quad ay - bx = 0\,;$$

il vient, pour sa distance un foyer (c, o),

$$\delta = \frac{-bc}{-\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc}{c} = b. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME III.

La distance d'un foyer à la projetante de l'autre foyer sur une asymptote, vaut l'axe transverse.

En effet, la projetante du foyer de droite, sur l'asymptote

$$y = \frac{b}{a}x,$$

a pour équation

$$by + ax - ac = 0\,;$$

et la distance du foyer de gauche à cette dernière droite, vaut

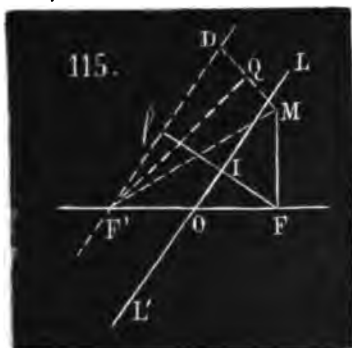
$$\delta = \frac{-ac - ac}{-\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2ac}{c} = 2a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SCOLIE. La distance du centre à la projetante d'un foyer sur une *asymptote, vaut le demi-axe transverse.*

N. B. Le lecteur trouvera facilement une démonstration géométrique des deux théorèmes précédents.

PROBLÈME I.

Construire l'hyperbole dont on connaît, un foyer, une asymptote et un point (fig. 115).



Soient F, LL' et M le foyer, l'asymptote et le point donnés ; la distance FI vaut b. Menons par f, symétrique de F par rapport à LL', la droite fF', parallèle à LL', elle passera par le second foyer.

Ceci posé, sur le prolongement de F'f, prenons fD = FM : la médiatrice normale QF' de MD, déterminera le foyer F' par son intersection avec fF' ; car

$$F'M = F'D \quad \text{donne} \quad F'M - FM = F'D - fD = F'f = \textit{constante} = 2a.$$

Les axes 2FI et $F'f$ déterminent la courbe, même en position, puisque l'excentricité FF' est tracée géométriquement.

THÉORÈME IV.

Toute portion de parallèle à une asymptote, comprise entre la courbe et une directrice, est égale à la distance du foyer correspondant au point où la parallèle rencontre la courbe.

En effet, soit (x', y') un point de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$$

nous aurons, pour la parallèle menée de ce point à une des asymptotes,

$$y - y' = \frac{b}{a}(x - x');$$

et pour la portion de cette droite, comprise entre le point (x', y') et un second point (x, y)

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}(x - x')^2 = \frac{c^2}{a^2}(x - x')^2.$$

Mais le second point étant sur la directrice de droite, on a

$$x = \frac{a^2}{c},$$

d'où

$$\delta^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x'\right)^2,$$

et par suite (*numériquement*)

$$\delta = \frac{cx'}{a} - a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

PROBLÈME II.

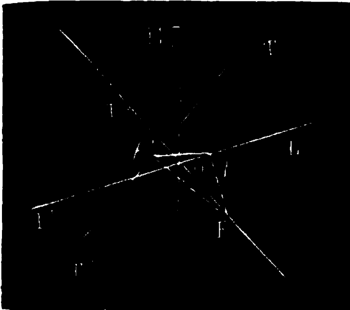
Construire l'hyperbole dont on donne un point, une directrice et une asymptote (fig. 116).

L'intersection I de la directrice et de l'asymptote étant la projection du foyer sur cette dernière droite, donc IF perpendiculaire à LL' passera par le foyer F. Ensuite MK limitée à DD' et parallèle à LL' étant égale à la distance du point M au foyer F, ce dernier est déterminé par l'intersection de IF avec la circonférence ayant M et MK pour centre et rayon.

Enfin FO perpendiculaire à DD' donne la position de l'axe transverse qui a pour longueur 2OI, tandis que l'axe imaginaire vaut 2FI; et par suite la courbe est parfaitement déterminée en grandeur et en position.

PROBLÈME III.

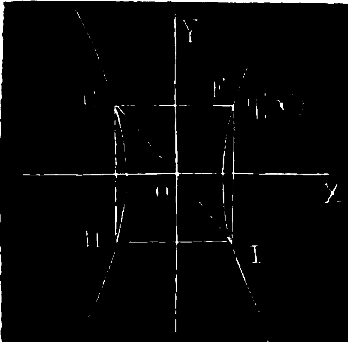
Décrire une hyperbole connaissant un foyer, une tangente et une asymptote (fig. 117).



Les projections f et f' du foyer F sur l'asymptote LL' et la tangente TT' donnent deux point f et f' de la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre; et par suite la médiatrice perpendiculaire à la corde ff' coupe l'asymptote LL' au centre O; ce qui détermine l'*excentricité* FF', *l'axe transverse* $2Of$ et *l'axe imaginaire* $2Ff$.

PROBLÈME IV.

Inscrire un carré dans une hyperbole (fig. 108).



Soit

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$$

l'hyperbole rapportée à ses axes; pour le sommet F du carré, nous aurons

$$y' = x',$$
$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2.$$

Ainsi, comme dans l'ellipse, les sommets du carré seront les intersections de la courbe avec les bissextrices des angles formés par ses axes; mais comme on obtient

$$y' = x' = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

il faut en conclure que le problème n'est possible que pour *les hyperboles dont l'axe transverse est moindre que l'axe imaginaire*; et dans ce cas il vient

$$\textit{surface du carré inscrit} = \frac{4a^2b^2}{b^2 - a^2},$$

PROBLÈME V.

Inscrire, dans une hyperbole, un triangle équilatéral dont un des côté passe par le centre.

Soit

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \qquad \text{(H)}$$

l'hyperbole rapportée à ses axes, (x', y'), $(-x', -y')$ et (α, β) les trois sommets du triangle demandé; nous avons

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2 \qquad (1),$$
$$a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = - a^2b^2 \qquad (2),$$

$$[y'-(-y')]^2+[x'-(-x')]^2=(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2 \text{ ou } 3y'^2+3x'^2=-2\beta y'-2\alpha x'+\alpha^2+\beta^2,$$
$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2=(-y'-\beta)^2+(-x'-\alpha)^2 \text{ ou } \beta y'+\alpha x'=0 \quad (3);$$

et cette dernière relation réduit la précédente à

$$3y'^2 + 3x'^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (4).$$

Ceci posé, en éliminant (x', y') entre (1), (3) et (4) on aura un lieu en (α, β) qui coupera (H) au sommet (α, β). Or, (3) et (4) donnent

$$3y'^2 = \alpha^2 \quad \text{et} \quad 3x'^2 = \beta^2,$$

d'où, pour (1),

$$b^2\beta^2 - a^2\alpha^2 = 3a^2b^2 \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire une hyperbole dont l'*axe transverse est sur* OY, semblable à (H) et non *homothétique*. Or, (φ) peut être remplacée par $[(\varphi) + (2)\,3]$, ou par

$$(b^2 + 3a^2)\beta^2 - (a^2 + 3b^2)\alpha^2 = 0 \quad \text{donnant} \quad \beta = \pm \alpha\sqrt{\frac{a^2 + 3b^2}{b^2 + 3a^2}} \qquad (\varphi')$$

représentant une double droite passant par l'origine; lesquelles ne couperont (2) ou (H) que pour

$$a < b.$$

D'un autre côté, si nous éliminons (α, β) entre (2), (3) et (4), on obtient

$$3b^2y'^2 - 3a^2x'^2 = a^2b^2 \qquad (\psi)$$

coupant (1) ou (H) aux sommets (x', y') et $(-x', -y')$; mais (ψ) peut être remplacée par $[(1) + (\psi)]$, d'où

$$y' = \pm x'\sqrt{\frac{b^2 + 3a^2}{a^2 + 3b^2}} \qquad (\psi');$$

c'est-à-dire par une double droite passant par l'origine : lesquelles ne peuvent rencontrer (H) ou (1) que pour

$$a < b.$$

Ainsi le problème ne sera possible que pour les hyperboles dans lesquelles *l'axe imaginaire sera plus grand que celui transverse.*

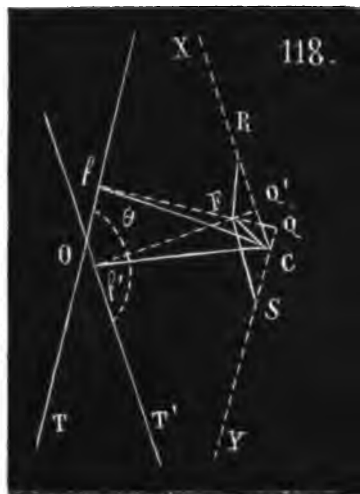
N. B. Le lecteur a probablement déjà remarqué que (ψ') n'est autre que le côté diamétral du triangle cherché.

PROBLÈME VI.

Déterminer le lieu des foyers des courbes du second ordre concentriques et ayant deux tangentes communes (fig. 118).

Soient T, T', C les tangentes et le centre de ces courbes. Si maintenant F est un des foyers cherchés, ses projections f et f' sur T et T' donneront

$$Cf = Cf'.$$



Or, en traçant CX et CY parallèles aux tangentes, nous aurons

$$CF^2 = Cf^2 + fF^2 - 2Ff.\,fQ;$$

mais

$$fF^2 = (fQ - FQ)^2 = fQ^2 + FQ^2 - 2fQ.\,FQ,$$

$$2fF.\,fQ = 2fQ(fQ - FQ) = 2fQ^2 - 2fQ.FQ;$$

doù, en désignant par a le demi-axe transverse Cf et d la distance du centre C à la tangente T,

$$CF^2 = a^2 + FQ^2 - d^2.$$

On aurait de même, d' étant la distance du centre C à T',

$$CF^2 = a^2 + FQ'^2 - d'^2;$$

et par suite

$$FQ^2 - FQ'^2 = d^2 - d'^2 \qquad (1).$$

Or, en prenant CQ et CQ' parallèles à T et à T' comme axes coordonnés, on a

$$FQ = FS \sin.\, FSQ = x \sin.\,\theta \quad \text{et} \quad FQ' = FR \sin.\, FRQ' = y \sin.\,\theta;$$

d'où, en substituant dans (1),

$$y^2 - x^2 = \frac{d'^2 - d^2}{\sin.^2 \theta} \qquad (\varphi).$$

Ainsi le lieu est *une hyperbole équilatère* ayant le point C pour centre.

SCOLIE. *Construire les foyers d'une courbe à centre du second ordre, dont on connaît le centre et trois tangentes.*

Ces foyers seront les points d'intersection de trois hyperboles équilatères, construites d'après le problème précédent et en prenant ces tangentes deux à deux.

PROBLÈME VII.

Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés sont tangents à une hyperbole et pour lesquels la corde des contacts est tangente à une ellipse ayant en position et en grandeur les mêmes axes que l'hyperbole (fig. 119).

D'abord les sommets A et A' situés sur l'axe transverse des deux courbes sont bien des points du lieu demandé; ensuite les tangentes aux extrémités B et B' du second axe de l'ellipse donneront chacune un couple de tangentes à l'hyperbole, déterminant deux points évidemment placés sur OY et symétriques par rapport au centre. (Nous trouverons B et B' pour ces points).

Ceci posé soient

$$\text{E)} \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad \text{(H}$$

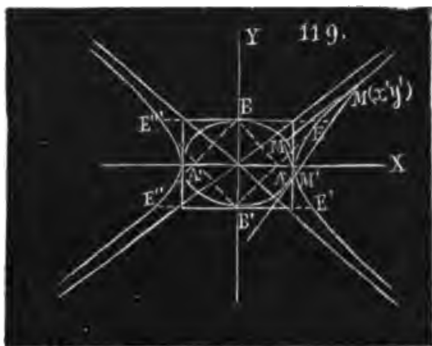
les équations des deux directrices ; de plus, la tangente

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2$$

en un point (x', y') de l'hyperbole doit passer par le point (α, β) du lieu cherché : donc

$$a^2\beta y' - b^2\alpha x' = -a^2b^2 \quad \text{ou} \quad a^2\beta y - b^2\alpha x = -a^2b^2$$

caractérise bien la corde des tangentes menées par (α, β) au lieu directeur (H).



Or, cette droite des contacts, mise sous la forme

$$y = cx + d,$$

donne, pour les abscisses de ses intersections avec (E),

$$(a^2c^2 + b^2)x^2 + 2a^2cdx + a^2(d^2 - b^2) = 0;$$

et, comme ces valeurs doivent être égales, on a

$$a^2c^2 - d^2 + b^2 = 0;$$

d'où, en remplaçant c et d par leurs valeurs,

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2 \qquad (\varphi),$$

c'est-à-dire l'*ellipse directrice elle-même*.

SCOLIE. Réciproquement l'*hyperbole* (H) *est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés tangents à* (E), *déterminent des cordes de contact tangentes à* (H).

Exercices.

1° Un triangle est inscrit dans une hyperbole ; deux de ses côtés ont des directions invariables ; quel est le lieu du milieu du troisième côté ?

2° Sur l'une des diagonales d'un rectangle, prise pour corde, on décrit un cercle ; quel est le lieu des extrémités des diamètres parallèles à la seconde diagonale ?

3° Étant donnés un angle et un point fixe, par ce point on mène une sécante quelconque et, par les points où cette sécante rencontre les côtés de l'angle, on trace des droites respectivement paralèlles à ces côtés ; quel est le lieu de l'intersection de ces parallèles ?

4° Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle, passe par le point de rencontre des hauteurs.

§ X.

De l'étude des courbes du second ordre.

DE L'HYPERBOLE.

XXXIXe & XLe LEÇON.

SOMMAIRE.

Des diamètres. — Théorèmes I. Le produit des directions d'un diamètre de l'hyperbole & de sa corde conjuguée, est constant. — II. Les cordes d'un diamètre de l'hyperbole sont parallèles à la tangente menée par l'extrémité de ce diamètre. Corollaire. — III. De deux diamètres conjugués de l'hyperbole, un seul rencontre la courbe. — Cordes supplémentaires. — Théorèmes I. Le produit des directions de deux cordes supplémentaires, est constant. Réciproques. — II. Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués. — III. L'angle de deux diamètres conjugués de l'hyperbole n'est assujetti à aucune limite. Problème. — IV. Le diamètre du point de contact d'une tangente parallèle à une corde supplémentaire, est parallèle à l'autre corde supplémentaire. Problème. — Hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués. — Scolies et remarques. — Pôle & polaire de l'hyperbole. — Construction de l'hyperbole aux diamètres conjugués. — Théorèmes I. Le parallélogramme construit sur deuxdiamètres conjugués de l'hyperbole, est équivalent au rectangle des axes. — II. La différence des carrés de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, vaut la différence des carrés des axes. Corollaire. — Relations entre les axes, les diamètres conjugués et leurs inclinaisons mutuelles. — Applications. — Exercices.

Des diamètres.

168. Considérons l'hyperbole rapportée à ses axes

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad \text{(H)},$$

et une corde ayant m pour direction ; en transportant l'origine au milieu (x_1, y_1) de cette corde, nous aurons

$$a^2 (y + y_1)^2 - b^2 (x + x_1)^2 = - a^2b^2 ;$$

et par suite, pour les abscisses des points d'intersection de cette corde passant alors par l'origine,

$$a^2 (mx + y_1)^2 - b^2 (x + x_1)^2 + a^2b^2 = 0,$$

ou

$$(a^2m^2 - b^2) x^2 + 2 (a^2my_1 - b^2x_1) x + (a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + a^2b^2) = 0.$$

Or, cette relation doit évidemment donner pour x des valeurs égales et de signes contraires ; donc

$$a^2my_1 - b^2x_1 = 0$$

sera l'équation du milieu (x_1, y_1) d'une corde quelconque, admettant m pour direction ; ou, en omettant l'accentuation,

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x \qquad \text{(D)}.$$

Ainsi, comme dans l'ellipse, les diamètres de l'hyperbole passent par le centre ; mais on ne peut ici conclure que toute droite menée par ce point est un diamètre, car pour

$$m = \pm \frac{b}{a} \quad \text{il vient} \quad y = \pm \frac{b}{a} x ;$$

c'est-à-dire que le diamètre correspondant serait parallèle à ses cordes conjuguées, ce qui est physiquement absurde. Du reste, le lecteur aura déjà reconnu que ces prétendus diamètres se confondent avec les asymptotes.

THÉORÈME I.

Le produit des directions, par rapport à un axe, d'un diamètre de l'hyberbole et de sa corde conjuguée, est constant.

En effet, m étant la direction d'un système de cordes parallèles, on a, pour celle du diamètre correspondant,

$$\delta = \frac{b^2}{a^2m} \quad \text{d'où} \quad m\delta = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II.

Les cordes d'un diamètre de l'hyberbole sont parallèles à la tangente menée par l'extrémité de ce diamètre.

Car nous avons trouvé ci-dessus

$$\alpha\delta = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{et} \quad m\delta = \frac{b^2}{a^2}$$

pour les directions de ces trois droites; donc

$$m = \delta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. Par suite de la définition des diamètres conjugués, on a également, pour un système de deux de ces droites,

$$\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2};$$

et, comme on ne peut avoir

$$\delta\delta' = -1,$$

on en conclut que l'hyperbole, comme l'ellipse, n'admet qu'*un seul système d'axes conjugués*.

THÉORÈME III.

De deux diamètres conjugués de l'hyperbole, un seul rencontre la courbe.

En effet, les diamètres conjugués

$$y = \delta x \quad \text{et} \quad y = \delta' x$$

donnent pour leurs intersections avec l'hyperbole, rapportée à ses axes,

$$x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} - \delta^2}} \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} - \delta'^2}};$$

et la relation de condition

$$\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2},$$

implique que l'une de ces abscisses est imaginaire. C. Q. F. D.

N. B. Les valeurs de x deviennent infinies par la direction des asymptotes.

Des cordes supplémentaires.

169. De même que pour l'ellipse, on appelle *cordes supplémentaires de l'hyperbole, les cordes qui partent d'un même point de la courbe et aboutissent aux extrémités d'un même diamètre.*

THÉORÈME I.

Le produit des directions, par rapport à un axe, de deux cordes supplémentaires de l'hyperbole, est constant.

Désignons par γ et γ' les directions de deux cordes menées d'un point (x, y) de l'hyperbole aux extrémités (x', y') et $(-x', -y')$ d'un diamètre de cette courbe; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= \frac{y - y'}{x - x'},\\ \gamma' &= \frac{y + y'}{x + x'},\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{ \gamma\gamma' = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} = \frac{b^2}{a^2}: \right.$$

par suite des relations

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2,$$

combinées par voie de soustraction.

RÉCIPROQUEMENT : 1° *Si pour deux cordes tirées d'un même point de l'hyperbole on a* $\gamma\gamma' = \frac{b^2}{a^2}$, *leurs secondes extrémités seront celles d'un diamètre.*

2° *Si pour deux cordes tirées des extrémités d'un diamètre de l'hyperbole on a* $\gamma\gamma' = \frac{b^2}{a^2}$, *elles se couperont sur la courbe.*

THÉORÈME II.

Deux cordes supplémentaires de l'hyperbole sont parallèles à deux diamètres conjugués.

En effet, $b^2 : a^2$ est le produit $\delta\delta'$ des directions de deux diamètres conjugués et celui $\gamma\gamma'$ de deux cordes supplémentaires ; donc de

$$\gamma = \delta \quad \text{on déduit} \quad \gamma' = \delta'.$$

THÉORÈME III.

L'angle de deux diamètres conjugués de l'hyperbole n'est assujetti à aucune limite.

En effet, appelons V cet angle et considérons les cordes supplémentaires menées d'un point de la courbe aux extrémités de l'axe transverse ; nous aurons

$$\text{tg.V} = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

Or, l'hyperbole, rapportée à ses axes,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad \text{donne} \quad (x^2 - a^2)\,b^2 = a^2y^2 ;$$

donc

$$\text{tg. V} = \frac{2ab^2}{c^2y},$$

et y peut passer par tous les états de grandeur. C. Q. F. D.

PROBLÈME.

Construire deux diamètres conjugués de l'hyperbole et formant l'angle θ.

Sur un diamètre comme corde, on décrira un segment circulaire capable de l'angle θ, ses intersections avec la courbe donneront des points qui, joints aux

extrémités du diamètre, détermineront deux cordes supplémentaires formant les angles θ et $180 - \theta$; et par suite les parallèles menées par le centre à ces cordes, seront les diamètres demandés.

N. B. Il y aura évidemment deux systèmes de diamètres, à moins toutefois que $\theta = 90°$, d'où $180° - \theta = 90$; c'est-à-dire qu'on obtiendrait les axes de symétrie de la courbe.

Théorème IV.

Le diamètre du point de contact d'une tangente parallèle à une corde supplémentaire, est parallèle à l'autre corde supplémentaire.

En effet, de

$$\left.\begin{aligned}\gamma\gamma' &= \frac{b^2}{a^2},\\ \alpha\delta &= \frac{b^2}{a^2};\end{aligned}\right\} \text{ on déduit, pour } \alpha = \gamma,\ \gamma' = \delta.... \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Problème I.

Tracer une tangente parallèle à une droite donnée.

On tracera deux cordes supplémentaires dont une parallèle à la droite donnée, l'autre sera parallèle au diamètre du point de contact; et par suite de la détermination de ce diamètre, on aura facilement la tangente.

N. B. On peut encore tracer une corde parallèle à la droite donnée et en déduire le diamètre du point de contact de la tangente demandée.

Voici, du reste, une construction géométrique très-simple : du foyer F' comme centre, décrivez une circonférence avec $2a$ pour rayon ; puis du second foyer F abaissez une perpendiculaire sur la droite donnée. Les médiatrices, parallèles à cette dernière droite, des distances du foyer F aux points où cette perpendiculaire coupe le cercle, seront les tangentes demandées.

Cette construction, également applicable à l'ellipse et avec certaines modifications, à la parabole, est due à MM. Briot et Bouquet.

Problème II.

Déterminer le centre d'une hyperbole tracée.

A cet effet, on mènera deux couples de cordes parallèles, les diamètres conjugués de ces deux couples donneront le centre par leur intersection.

Hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués.

170. L'hyperbole rapportée à ses axes est

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad \text{(H)};$$

déduisons-en l'équation aux diamètres conjugués : à cet effet, soient α et α' les angles formés par ces derniers avec l'axe transverse, il nous faut changer

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} x \cos.\alpha + y \cos.\alpha', \\ x \sin.\alpha + y \sin.\alpha'; \end{matrix}\right.$$

d'où, on déduit pour (H),

$$(a^2\sin^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha')y^2 + 2(a^2\sin\alpha\sin\alpha' - b^2\cos\alpha\cos\alpha')xy + (a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha)x^2 = -a^2b^2.$$

Or, la forme (H) devant rester la même, on a

$$a^2 \sin.\alpha \sin.\alpha' - b^2 \cos.\alpha \cos.\alpha' = 0 \qquad (1),$$

ou

$$\text{tg.}\,\alpha\ \text{tg.}\,\alpha' = \frac{b^2}{a^2} \qquad (1');$$

c'est-à-dire la relation entre les directions, par rapport à l'axe réel, de deux diamètres conjugués. De plus (1) indique que pour

$$a \sin.\alpha \gtrless b \cos.\alpha \quad \text{on doit avoir} \quad a \sin.\alpha' \lessgtr b \cos.\alpha'.$$

Ainsi l'équation de la courbe, par rapport à de tels axes, est

$$(a^2 \sin.^2 \alpha' - b^2 \cos.^2 \alpha')\, y^2 + (a^2 \sin.^2 \alpha - b^2 \cos.^2 \alpha)\, x^2 = -a^2b^2;$$

et comme les coefficients des carrés des variables sont de signes contraires, un seul diamètre rencontre la courbe (ce que nous avons déjà démontré); et en le prenant pour ligne des abscisses, nous avons

$$a \sin.\alpha < b \cos.\alpha \quad \text{d'où} \quad a \sin.\alpha' > b \cos.\alpha',$$

et par suite, en désignant par a' et $b'\sqrt{-1}$ les longueurs des demi-diamètres dirigés suivant OX et OY, de

$$\left.\begin{matrix} y = 0, \\ x = 0, \end{matrix}\right\} \text{ on déduit } \left\{\begin{matrix} (a^2 \sin.^2 \alpha - b^2 \cos.^2 \alpha)\, a'^2 = -a^2b^2 \quad (2), \\ (a^2 \sin.^2 \alpha' - b^2 \cos.^2 \alpha')\, b'^2 = a^2b^2 \quad (3). \end{matrix}\right.$$

En substituant dans l'équation de la courbe les valeurs des coefficients des carrés des variables, déduites de (2) et (3), on obtient

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \qquad (H').$$

SCOLIES I. *Deux diamètres conjugués sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires.* LA RÉCIPROQUE *est vraie.*

II. *Il existe une infinité de diamètres conjugués*, car toute valeur attribuée à α dans (1'), en détermine une pour α'; toutefois en omettant le cas de la direction des asymptotes.

III. *L'hyperbole n'a que deux axes de symétrie.* En effet

$$\alpha' = 90^\circ + \alpha,$$

réduit (1) à

$$(a^2 + b^2) \sin.\alpha \cos.\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \sin.\alpha \cos.\alpha = 0;$$

c'est-à-dire qu'il faut avoir

$$\left.\begin{matrix} \sin.\alpha = 0, \\ \text{ou} \\ \cos.\alpha = 0, \end{matrix}\right\} \text{donnant} \left\{\begin{matrix} \alpha = 0^\circ, = 180^\circ, \\ \text{ou} \\ \alpha = 90^\circ, = 270^\circ; \end{matrix}\right.$$

donc les axes coordonnés primitifs.

IV. *L'hyperbole vulgaire a ses diamètres conjugués* INÉGAUX.

En effet

$$a' = b',$$

donne, (2) et (3),

$$a^2 \sin.^2 \alpha - b^2 \cos.^2 \alpha = - a^2 \sin.^2 \alpha' + b^2 \cos.^2 \alpha';$$

d'où, en éliminant les *cos*,

$$\sin.^2\alpha + \sin.^2\alpha' = \frac{2b^2}{a^2 + b^2};$$

alors (1) devient, en transportant un terme et élevant au carré,

$$\sin.^2\alpha \sin.^2\alpha' = \frac{b^4}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Donc, $\sin.^2\alpha$ et $\sin.^2\alpha'$ sont les racines de l'équation

$$Z^2 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} Z + \frac{b^4}{(a^2 + b^2)^2} = 0;$$

et par suite

$$\sin.^2\alpha = \sin.^2\alpha' \quad \text{d'où} \quad \cos.^2\alpha = \cos.^2\alpha',$$

et

$$\text{tg.}^2\alpha = \text{tg.}^2\alpha'.$$

Or, d'après (1'), tg. α et tg. α' doivent être de même signe; donc

$$\alpha = \alpha',$$

c'est-à-dire qu'il n'y aurait plus d'axes coordonnés, ce qui est absurde.

N. B. Plus loin, nous verrons que *dans l'hyberbole équilatère, les diamètres conjugués sont égaux.*

171. REMARQUES. L'équation

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = - a'^2b'^2 \qquad \text{(H')}$$

de l'hyperbole aux diamètres conjugués ne différant de celle aux axes que par l'accentuation des constantes, il en résulte que les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées seront communes aux axes de l'hyperbole et à ses diamètres conjugués. Ainsi

I. *Les carrés des ordonnées parallèles à un diamètre sont proportionnels aux rectangles des segments soustractifs qu'elles déterminent sur son conjugué.*

II. *La direction de la tangente au point* (x', y') *sera*

$$\alpha = \frac{b'^2x'}{a'^2y'},$$

et l'équation de cette droite

$$a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2;$$

de plus, on aura

$$\text{SOUS-TANGENTE} = \frac{x'^2 - a'^2}{x'};$$

et pour la positon limite des tangentes

$$y = \pm \frac{b'}{a'}x,$$

c'est-à-dire que *les asymptotes coïncident avec les diagonales du parallélogramme ayant pour côté les parallèles aux diamètres conjugués et menées par les extrémités de ces derniers.*

III. *L'équation du diamètre des cordes ayant* m *pour direction, sera*

$$y = \frac{b'^2}{a'^2m}x,$$

d'où

$$m\delta = \frac{b'^2}{a'^2} = \delta\delta' = \gamma\gamma' = \alpha\delta:$$

δ, δ', γ, γ' *et* α *étant les directions des diamètres conjugués, de deux cordes supplémentaires et de la tangente à l'extrémité du premier diamètre.*

Pôle & polaire de l'hyperbole.

172. Soit (x'', y'') les coordonnées d'un point et

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$$

l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués; en désignant par (x', y') le point de contact de la tangente tracée à la courbe du point (x'', y''), cette tangente sera

$$a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2,$$

et, comme elle passe par (x'', y''),

$$a'^2y''y' - b'^2x''x' = -a'^2b'^2 \quad \text{ou} \quad a'^2y''y - b'^2x''x = -a'^2b'^2$$

sera la corde des contacts.

Or, cette corde donne pour ses coordonnées à l'origine

$$\frac{a'^2}{x''} \quad \text{et} \quad -\frac{b'^2}{y''};$$

et de ce que la première est indépendante de y'', on reconnaît que, *si par les différents points d'une droite* (ici parallèle à OY) *on trace des tangentes à une hyperbole, les cordes de contact se couperont en un même point situé sur le diamètre conjugué de celui qui serait parallèle à la droite donnée.*

LA RÉCIPROQUE *est vraie.*

Construction de l'hyperbole aux diamètres conjugués.

173. La conformité des équations aux axes et aux diamètres conjugués d'une hyperbole, fait reconnaître que $2a'$ et $2b'$ désignant deux diamètres conjugués et θ leur angle, il suffira de construire comme si $2a'$ et $2b'$ étaient les axes de symétrie, de conserver à chaque ordonnée sa longueur et de l'incliner sur $2a'$ de θ, puis de joindre toutes leurs extrémités par un trait continu.

174. Les deux théorèmes suivants et (1) ou (1') du § 170 servent à résoudre tous les problèmes relatifs aux axes et aux diamètres conjugués.

Relations entre les parallélogrammes de deux diamètres conjugués et les carrés de ces derniers.

THÉORÈME I.

Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués d'une hyperbole, est équivalent au rectangle des axes.

En effet, combinant (2) et (3) du § 170 par voie de multiplication, on obtient

$$[a^4\sin.^2\alpha\sin.^2\alpha' - a^2b^2(\sin.^2\alpha'\cos.^2\alpha + \sin.^2\alpha\cos.^2\alpha') + b^4\cos.^2\alpha\cos.^2\alpha']a'^2b'^2 = -a^4b^4.$$

Mais (1) donnant, en élevant un carré et transposant,

$$a^4\sin.^2\alpha\sin.^2\alpha' + b^4\cos.^2\alpha\cos.^2\alpha' = +2a^2b^2\sin.\alpha\sin.\alpha'\cos.\alpha\cos.\alpha',$$

la relation précédente devient, après division par a^2b^2 et changement de signe,

$$(\sin.^2\alpha'\cos.^2\alpha - 2\sin.\alpha\sin.\alpha'\cos.\alpha\cos.\alpha' + \sin.^2\alpha\cos.^2\alpha')a'^2b'^2 = a^2b^2,$$

ou

$$(\sin.\alpha'\cos.\alpha - \sin.\alpha\cos.\alpha')^2 a'^2b'^2 = a^2b^2;$$

et par suite, en multipliant par 4 et après avoir extrait la racine carrée,

$$4a'b'\sin.(\alpha' - \alpha) = 4ab \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II.

La différence des carrés de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, vaut la différence des carrés des axes.

De l'équation (2) du § 170 nous déduisons

$$\sin.^2 \alpha = \frac{b^2 (a'^2 - a^2)}{a'^2 (a^2 + b^2)} \quad \text{et} \quad \cos.^2 \alpha = \frac{a^2 (a'^2 + b^2)}{a'^2 (a^2 + b^2)};$$

et, comme (3) du même § peut s'écrire

$$(a^2 \sin.^2 \alpha' - b^2 \cos.^2 \alpha') (-b'^2) = -a^2 b^2,$$

on obtient, en changeant dans les relations précédentes α en α' puis a'^2 en $-b'^2$,

$$\sin.^2 \alpha' = \frac{b^2 (b'^2 + a^2)}{b'^2 (a^2 + b^2)} \quad \text{et} \quad \cos.^2 \alpha' = \frac{a^2 (b'^2 - b^2)}{b'^2 (a^2 + b^2)};$$

et par suite, en substituant (§ 170) dans (1), après avoir transposé un terme et élevé un carré,

$$a^4 . \frac{b^4 (a'^2 - a^2)(b'^2 + a^2)}{a'^2 b'^2 (a^2 + b^2)^2} = \frac{b^4 a^4 (a'^2 + b^2)(b'^2 - b^2)}{a'^2 b'^2 (a^2 + b^2)^2},$$

d'où, en réduisant,

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. Soit $a = b$, alors

$$a' = b'.$$

Donc, dans *l'hyperbole équilatère les diamètres conjugués* SONT ÉGAUX; et par suite, *elle est parmi les hyperboles ce qu'est le cercle parmi les ellipses.*

Relations entre les axes, les diamètres conjugués & leurs inclinaisons mutuelles.

178. Les équations (1), (2) et (3) du § 170 permettent de résoudre toutes les questions numériques relatives à ces droites et à leurs inclinaisons mutuelles; mais il est préférable de leur substituer les suivantes

$$\text{tg.}\, \alpha\, \text{tg.}\, \alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad (1'),$$

$$a'b' \sin. (\alpha' - \alpha) = ab \qquad (2'),$$

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \qquad (3');$$

car elles sont évidemment plus simples.

Applications.

176. Voici quelques applications complètement développées.

THÉORÈME.

Dans deux courbes concentriques du second ordre dont les axes coïncident en position, la somme des carrés de deux diamètres conjugués de la première, chacun divisé respectivement par le carré du diamètre de la seconde, compris sur la même direction, est une quantité constante.

Considérons l'ellipse et l'hyperbole

$$\text{E)}\qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,\quad A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 \qquad \text{(H;}$$

et soit un système de diamètres conjugués

$$d)\qquad y = \delta x,\qquad y = -\frac{b^2}{a^2\delta}x \qquad ,\ d')$$

de (E); nous aurons, pour les extrémités du premier,

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\delta^2 + b^2},\quad y^2 = \frac{a^2b^2\delta^2}{a^2\delta^2 + b^2};$$

et pour sa demi-longueur

$$a'^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2(1+\delta^2)}{(a^2\delta^2 + b^2)} \qquad (a'^2).$$

En changeant dans cette relation la direction de (d) en celle de (d'), on obtient, pour ce conjugué,

$$b'^2 = \frac{a^4\delta^2 + b^4}{a^2\delta^2 + b^2} \qquad (b'^2).$$

Ceci posé, si nous désignons par $2A'$ et $2B''$ les diamètres de l'hyperbole qui sont couchés sur ceux de l'ellipse, et qui ne seraient conjugués qu'autant que les courbes seraient semblables de forme et de position; nous aurons facilement A'^2 en changent dans (a'^2), a^2 en A^2 et b^2 en $-B^2$, d'où

$$A'^2 = \frac{A^2B^2(1+\delta^2)}{B^2 - A^2\delta^2};$$

pour B''^2, il faudra évidemment remplacer δ par $-\frac{b^2}{a^2\delta}$ dans cette dernière valeur, d'où

$$B''^2 = \frac{A^2B^2(a^4\delta^2 + b^4)}{a^4B^2\delta^2 - A^2b^4}.$$

Enfin, nous avons

$$\frac{a'^2}{A'^2} + \frac{b'^2}{B''^2} = \frac{a^2b^2(B^2 - A^2\delta^2)}{A^2B^2(a^2\delta^2 + b^2)} + \frac{a^4B^2\delta^2 - A^2b^4}{A^2B^2(a^2\delta^2 + b^2)} = \frac{(a^2\delta^2 + b^2)(a^2B^2 - b^2A^2)}{A^2B^2(a^2\delta^2 + b^2)},$$

et, en simplifiant,

$$\frac{a'^2}{A'^2} + \frac{b'^2}{B''^2} = \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE. Si la seconde courbe eut été une ellipse, on aurait obtenu

$$\frac{a'^2}{A'^2} + \frac{b'^2}{B''^2} = \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2};$$

et

$$\frac{a'^2}{A'^2} - \frac{b'^2}{B''^2} = \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2},$$

pour le cas de deux hyperboles.

PROBLÈME I.

Quel est le lieu des extrémités des diamètres imaginaires d'une hyperbole.

D'abord les extrémités de l'*axe imaginaire* sont déjà deux points du lieu cherché. Ceci posé, soit

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad \text{(D)}$$

l'hyperbole donnée; nous aurons pour génératrices

$$\text{G)} \qquad x^2 + y^2 = b'^2 \qquad \text{et} \qquad y = \text{tg.}\, \alpha'.\, x \qquad \text{(G'};$$

α' étant l'angle formé par le diamètre imaginaire $2b'$ et conjugué de $2a'$, avec l'axe transverse de la courbe.

Mais nous avons trouvé, en passant des coordonnées aux axes à celles déterminées par les diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$,

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2 \sin.^2 \alpha' - b^2 \cos.^2 \alpha')} \qquad (1);$$

donc, il ne reste plus qu'à éliminer *les constantes variables* α' et b' entre (G), (G') et (1). Or, (G') donne

$$\sin.^2 \alpha' = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \cos.^2 \alpha' = \frac{x^2}{x^2 + y^2};$$

d'où, en substituant dans (1) et faisant emploi de (G),

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2\,(x^2 + y^2)}{a^2y^2 - b^2x^2} \qquad (\psi).$$

Cette dernière fonction, débarassée de la solution étrangère

$$y^2 + x^2 = 0,$$

ou de l'origine, donne

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (\varphi).$$

pour le lieu demandé; c'est-à-dire *une hyperbole*, admettant les mêmes asymptotes que (D) et pour diamètres imaginaires ceux réels de (D); et pour cette double raison elle est dite *la conjuguée* de la proposée.

REMARQUE. Le lieu (ψ) considéré analytiquement, c'est-à-dire indépendamment des motifs actuels de sa détermination, se compose de l'hyperbole (φ) et de l'origine [*centre de* (D)] des coordonnées. Ce point isolé prend le nom de *conjugué* et *sa conception géométrique peut résulter de cette idée d'un plan tangent à une surface en un certain point et coupant cette dernière suivant une ligne ne passant pas par le point de contact.*

PROBLÈME II.

Déterminer le lieu de l'intersection des tangentes menées à une hyperbole et à sa conjuguée, par les extrémités de deux diamètres conjugués.

La génération donne spontanément pour points spéciaux, les sommets du rectangle des axes des deux directrices.

Soient maintenant les hyperboles données

$$\text{H)} \qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2 \qquad \text{(H}'.$$

En désignant par (x', y') et (x'', y'') les origines de deux diamètres conjugués, nous aurons

$$\text{G)} \qquad a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2yy'' - b^2xx'' = a^2b^2 \qquad \text{(G}'$$

pour les tangentes génératrices; et

$$\text{1)} \qquad a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2, \; a^2y''^2 - b^2x''^2 = a^2b^2 \qquad \text{(2}$$

pour caractériser la position des points de contact de (G) et (G').

D'autre part, les tangentes étant parallèles aux diamètres conjugués et ayant pour directions $y' : x'$ ainsi que $y'' : x''$, il vient

$$\frac{y'y''}{x'x''} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad 2a^2y'y'' - 2b^2x'x'' = 0 \qquad (3);$$

et par suite en éliminant les *constantes variables* entre (G), (G'), (1), (2) et (3) on obtiendra le lieu demandé.

Or, (1) + (2) + (3) donne

$$a^2(y' + y'')^2 - b^2(x' + x'')^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a(y' + y'') = \mp b(x' + x'') \qquad (4);$$

et, en ajoutant (G) et G'), on obtient

$$a^2y(y' + y'') = b^2x(x' + x'') \qquad (5).$$

Il suffit de combiner (4) et (5) par voie de division pour avoir

$$ay = \mp bx,$$

et par suite

$$y = \mp \frac{b}{a}x \qquad (\varphi);$$

c'est-à dire que *lieu demandé n'est autre que le système des asymptotes communes aux deux hyperboles conjuguées*.

Exercices.

1° Quel est le lieu du centre de la circonférence interceptant des longueurs données sur les côtés d'un angle donné?

2° Etant donnée une ellipse, on trace deux diamètres conjugués quelconques; quel est le lieu de l'intersection de l'un d'eux et de la projetante d'un point fixe sur l'autre?

3° Etant donné un arc d'hyperbole, décrire la courbe.

4° Tout quadrilatère inscrit à une hyperbole et dont une diagonale est un diamètre, a pour seconde diagonale une droite parallèle aux tangentes menées aux extrémités de ce diamètre.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE L'HYPERBOLE.

XLIme LEÇON.

SOMMAIRE.

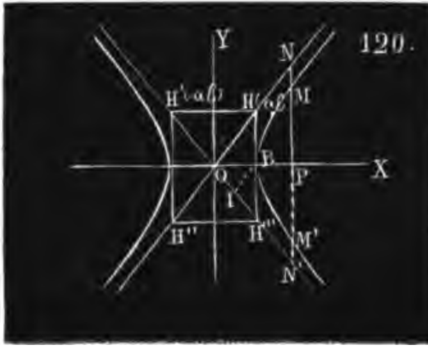
Des asymptotes. — Théorèmes I. Toute tangente à l'hyperbole et limitée aux asymptotes est divisée, par le point de contact, en deux parties égales. — II. Les portions de sécantes à l'hyperbole, comprises entre la courbe & les asymptotes, sont égales. — III. Tout demi-diamètre de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les segments déterminés par la courbe & les asymptotes de toute sécante parallèle à ce diamètre. — IV. L'aire du parallélogramme formé par les asymptotes & leurs parallèles par un point de la courbe, vaut la huitième partie du rectangle des axes *ou* du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués. — Hyperbole rapportée à ses asymptotes. — Tangente aux asymptotes. — Applications développées. — Exercices.

Des asymptotes.

177. La théorie générale de l'asymptotisme rectiligne appliquée aux courbes du second ordre, nous donne

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{b'}{a'} x,$$

pour les équations des asymptotes de l'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie *ou* à deux diamètres conjugués. De plus, nous avons reconnu antérieurement



que ces relations ne sont que la transformée de l'équation de la tangente, lorsque le point de contact est situé à l'infini.

Du reste, nous pouvons établir directement que les droites précédentes sont bien celles des asymptotes. En effet, (fig. 120) si $2a$ et $2b$ désignent deux diamètres conjugués quelconques (*ces droites peuvent être les axes de symétrie*), et que nous y rapportions l'hyperbole; nous aurons

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

d'où

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \text{PM}.$$

D'un autre côté, la diagonale OH du parallélogramme des deux diamètres conjugués donne, pour la même abscisse OP,

$$\text{PN} = \frac{b}{a} x,$$

et par suite

$$\text{MN} = \text{PN} - \text{PM} = \frac{b}{a} \left\{ x - \sqrt{x^2 - a^2} \right\} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Or, en faisant croître x depuis a jusqu'à $\pm \infty$, *la valeur de* MN *décroît jusqu'à zéro.* C. Q. F. D.

REMARQUE. Ainsi, nous retrouvons ce fait géométrique déjà énoncé : *Les asymptotes d'une hyperbole coïncident avec les diagonales des parallélogrammes formés sur deux diamètres conjugués et leur angle.*

THÉORÈME I.

Toute tangente à l'hyperbole et terminée aux asymptotes est divisée, par le point de contact, en deux parties égales.

En effet, la tangente au point B (fig. 120)

$$x = a,$$

donne, pour ses parties limitées aux asymptotes,

$$\text{BH} = b \quad \text{et} \quad \text{BH}''' = -b.$$

REMARQUES I. La tangente en un point quelconque B s'obtiendra en traçant BI

parallèle à une asymptote; puis on prendra, sur l'autre asymptote OH''', IH'''=OI; et H'''B sera la tangente en B.

II. Pour déterminer la longueur du diamètre conjugué des cordes parallèles à BH, il suffira de tracer HH' parallèle à OB et on aura

$$HH' = 2a' \quad \text{tandis que} \quad HH''' = 2b'.$$

THÉORÈME II.

Les portions de sécantes à l'hyperbole comprises entre la courbe et les asymptotes, sont égales.

En effet, d'un côté le diamètre OP de la corde MM', déterminant le point B de contact pour la tangente parallèle à MM', donne

$$BH = BH'''.$$

D'un autre côté, dans le triangle NON', la parallèle HH''' à NN' est coupée par OBP de telle sorte que

$$PN : PN' :: BH : BH''',$$

et de BH = BH''' on déduit

$$PN = PN';$$

donc

$$PN - PM = PN' - PM',$$

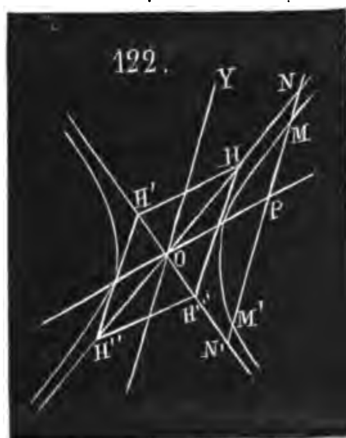
ou

$$MN = M'N' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. Nous engageons le lecteur à démontrer le cas où le diamètre de la corde correspondant à la sécante serait *imaginaire*.

THÉORÈME III.

Tout demi-diamètre de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les segments déterminés par la courbe et les asymptotes sur la sécante parallèle à ce diamètre.



Désignons par $2a'$ et $2b'$ deux diamètres conjugués auxquels nous supposerons la courbe rapportée (fig. 122);

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

$$y = \pm \frac{b'}{a'}x,$$

seront les équations de l'hyperbole et de ses asymptotes.

Ceci posé, nous aurons

$$PM^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2) \text{ et } PN^2 = \frac{b'^2}{a'^2}x^2,$$

pour les ordonnées de la courbe et de l'asymptote correspondant à une même abscisse OP ; d'où

$$PN^2 - PM^2 = b'^2,$$

ou

$$(PN + PM)(PN - PM) = b'^2.$$

Or

$$PN + PM = PN' + PM = MN',$$

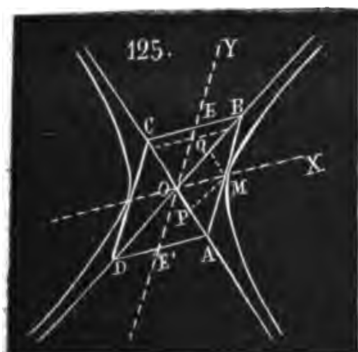
$$PN - PM = MN;$$

donc

$$MN'.MN = b'^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME IV.

L'aire du parallélogramme formé par les asymptotes et les parallèles à ces lignes par un point quelconque de la courbe, vaut la huitième partie du rectangle des axes, ou *du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués* (fig. 125).



En effet, soit OX et OY deux diamètres conjugués dont l'un passe par le point M de l'hyperbole ; en traçant MP et MQ parallèle aux asymptotes OB et OA ; nous avons

$$OPMQ \gtrless 2OMP \gtrless OAM,$$

car OP = PA.

Mais

$$OAM \gtrless \tfrac{1}{2} OMAE' \gtrless \tfrac{1}{8} ABCD. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Hyperbole rapportée à ses asymptotes.

178. L'appréciation directe du résultat demandé, implique la forme

$$xy = \textit{constante};$$

puisque les coordonnées à l'origine doivent être égales à l'infini. Ainsi, tout se réduit à déterminer cette *constante*.

Or, en désignant par x et y les coordonnées d'un point de la courbe rapportée à ses asymptotes ; nous aurons, β étant l'angle des axes coordonnés ou des asymptotes,

$$xy \sin.\beta = \tfrac{1}{4} ab,$$

d'après le théorème IV précédent.

D'un autre côté, θ étant l'inclinaison d'une asymptote sur l'axe transverse,

$$\sin.\beta = \sin. 2\theta = 2 \sin.\theta \cos.\theta;$$

mais de

$$\sin.\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \cos.\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{c},$$

on déduit

$$\sin.\beta = \frac{2ab}{c^2};$$

et par suite

$$xy = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4},$$

ou

$$xy = m^2 \qquad (\text{H}'').$$

N. B. La constante m^2 est appelée *la puissance de l'hyperbole*, et elle vaut *le quart de la somme des carrés des demi-axes*.

179. Le moyen précédent pour obtenir l'équation aux asymptotes est trop indirect pour que nous n'en cherchions pas un autre par la méthode universelle des transformations de coordonnées.

Considérons l'équation aux axes

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad (\text{H}),$$

et dans les formules de transformation

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} x\cos.\alpha + y\cos.\alpha', \\ x\sin.\alpha + y\sin.\alpha', \end{matrix}\right.$$

pour passer à des axes obliques de même origine; prenons pour α, l'angle (ici *négatif*) que forme l'asymptote inférieure avec l'axe transverse, α' sera l'inclinaison de l'autre asymptote avec le même axe; et comme α et α' sont égaux et de signes contraires, nous aurons

$$\sin.\alpha' = \frac{b}{c},\ \cos.\alpha' = \frac{a}{c}; \quad \text{d'où} \quad \sin.\alpha = \frac{-b}{c} \quad \text{et} \quad \cos.\alpha = \frac{a}{c}.$$

Donc, il faudra, dans (H), changer

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} \dfrac{a(x+y)}{c}, \\ \dfrac{b(y-x)}{c}; \end{matrix}\right.$$

d'où, on déduit

$$xy = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4} = m^2 \qquad (\text{H}''). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

N. B. Nous laissons au lecteur le soin de prouver que les asymptotes sont bien les seules droites qui, prises comme axes coordonnés, réduisent l'équation de

l'hyperbole à la forme

$$xy = constante.$$

Tangente aux asymptotes.

180. Soit l'équation de l'hyperbole aux asymptotes

$$xy = m^2;$$

nous aurons, pour la direction d'une sécante passant par les points (x', y') et (x'', y''),

$$\frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Or

$$x'y' = m^2 \quad \text{et} \quad x''y'' = m^2$$

donnent

$$x'y' - x''y'' = 0 \quad \text{ou} \quad x'(y' - y'') + y''(x' - x'') = 0,$$

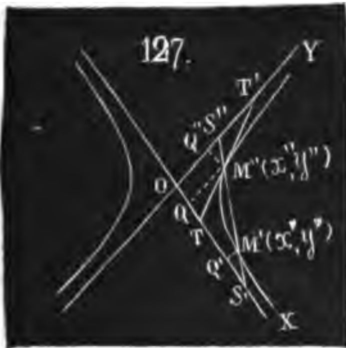
d'où

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y''}{x'};$$

et par suite pour la sécante

$$y - y'' = -\frac{y''}{x'}(x - x'') \qquad (1).$$

Enfin, en posant $x' = x''$ et $y' = y''$, il vient fig. (127) pour la tangente



$$y - y'' = -\frac{y''}{x''}(x - x'') \qquad (M''T).$$

Or, $y = 0$ donne

abscisse à l'origine de la tangente $= 2x''$,

d'où

$$M''T = M''T';$$

c'est-à-dire un théorème déjà démontré.

D'un autre côté, $y = 0$ donne, pour la sécante $M'M''$,

abscisse à l'origine de la sécante $= x' + x''$,

donc

$$Q'S' = OQ = M''Q'';$$

et par suite

$$M'S' = M''S'',$$

ou l'expression d'une vérité déjà établie.

Applications sur l'hyperbole.

THÉORÈME.

Si par deux points de l'hyperbole on trace des parallèles aux asymptotes, leur point de concours est situé sur le diamètre conjugué de la corde des deux points.

En effet, considérons l'hyperbole rapportée à ses asymptotes

$$xy = m^2 \qquad (H'');$$

nous aurons, pour l'équation du diamètre conjugué des cordes ayant m' pour direction,

$$y = -m'x,$$

ou

$$y = -\frac{y'-y''}{x'-x''}x \qquad (d);$$

en considérant la corde des deux points (x', y') et (x'', y'') donnés.

Mais

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y'',$$

désignent les deux parallèles assignées et (x', y'') sont les coordonnées de leur intersection; et, comme pour ce point, (d) se réduit à

$$y''x'' = y'x',$$

c'est-à-dire à une égalité puisque

$$x'y' = x''y'' = m^2,$$

le théorème est démontré.

PROBLÈME I.

Décrire une hyperbole connaissant un point et ses asymptotes (fig. 121).



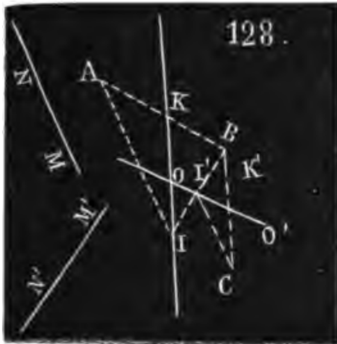
Par le point donné A on trace une droite BAB' terminée aux asymptotes OL et OL', le point A', symétrique de A par rapport au milieu C de cette droite, sera un nouveau point de la courbe; et ainsi de suite, en se servant successivement de chaque point déjà obtenu, afin d'éviter la confusion qui résulterait de l'emploi de l'unique point A : on obtient ainsi la branche AA''A'.

Quant à l'autre branche, on peut la déterminer de la même manière, ou en faisant usage de la considération qu'elle est symétrique de la précédente par rapport au centre O de la courbe.

PROBLÈME II.

Construire l'hyperbole dont on donne trois points et deux parallèles aux asymptotes (fig. 128).

Soient A, B, C, MN et M'N' les points donnés et les parallèles aux asymptotes.



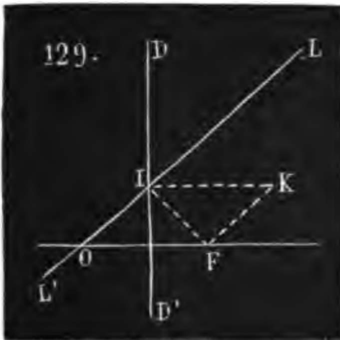
Les parallèles AI et BI aux asymptotes déterminent un point I du diamètre de la corde AB, donc IK médiatrice de AB est ce diamètre.

Une construction analogue à la précédente donne le diamètre I'K' correspondant à la corde BC; et par suite le centre O de la courbe.

Ainsi, en traçant par O des parallèles à MN et M'N', on aura les asymptotes, et le reste de la construction s'achèvera comme au problème précédent.

PROBLÈME III.

Construire une hyperbole connaissant une asymptote, une directrice et l'excentricité (fig. 129).



Soient DD', LL' et $2c$ la directrice, l'asymptote et l'excentricité.

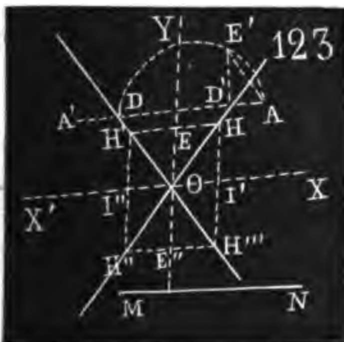
Traçons par l'intersection de DD' et LL' les droites IK et IF perpendiculaires à DD' et à LL'; la première donne la direction de l'axe transverse et la seconde IF passe par le foyer; puis prenant sur IK, une partie IK $= c$ et menant KF parallèle à LL', on aura le foyer F; car FO perpendiculaire à DD' donne

$$FO = IK = c.$$

Le reste de la construction s'achève facilement.

PROBLÈME IV.

Construire deux diamètres conjugués de l'hyperbole déterminée par les asymptotes, un point et la direction de l'un de ses diamètres (fig. 123).



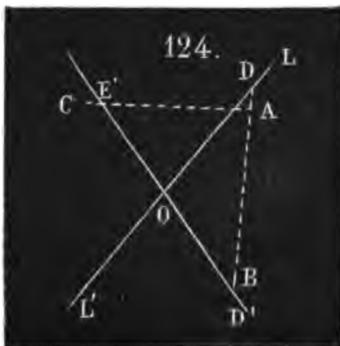
Par le point A traçons AD'D parallèle à la direction donnée MN d'un de ces diamètres dont la moitié sera moyenne proportionnelle entre les segments (*ici soustractifs*) AD et AD' que le point A et les asymptotes déterminent sur cette droite : d'où AE' que nous porterons sur OX et OX' parallèle à MN.

D'un autre côté, le diamètre conjugué OY de la corde AA' détermine la tangente HH''' en I' et par suite le parallélogramme HH'H''H'''; d'où, en direction et en grandeur, le second diamètre EE'', conjugué de I'I''.

N. B. La même construction donnera les axes de symétrie, car ceux-ci sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes.

PROBLÈME V.

Construire l'hyperbole dont on donne une asymptote et trois points (fig. 124).

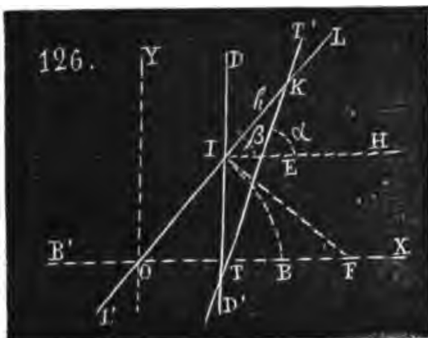


Soient LL', A, B et C l'asymptote et les trois points donnés ; d'abord les cordes AB et AC fixent deux points D' et E' de la seconde asymptote, qui sera donc D'E'.

Le problème revient donc à construire les axes d'après le précédent.

PROBLÈME VI.

Construire l'hyperbole dont on donne une directrice, une tangente et une asymptote (fig. 126).



Traçons, par l'intersection I de l'asymptote et de la directrice, IF et IH perpendiculaires la première à LL' et l'autre à DD', ce qui détermine une droite passant par le foyer et la direction de l'axe transverse ; et par suite les angles α et β, inclinaisons de la tangente et de l'asymptote sur l'axe des foyers, sont connus.

Ceci posé, en supposant la courbe rapportée à ses axes inconnus, nous aurons, (x', y') étant le point de contact inconnu de la tangente TT', $2a$ et $2b$ les axes,

$$(1) \qquad \text{tg.}\,\beta = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \text{tg.}\,\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'} \qquad (2).$$

De plus, posons $\text{IK} = h$ et $\text{IE} = h'$ et nous rappelant que $\text{OI} = a$ et que $\text{OT} = \frac{a^2}{x'}$, nous obtenons

$$\text{OT} : \text{IE} :: \text{OK} : \text{IK} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{x'} : h' :: a + h : h,$$

donc

$$a^2h = h'(a+h)\,x' \qquad (3);$$

et nous avons aussi

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2 \qquad (4).$$

Ainsi, en déduisant a de (1), (2), (3) et (4) on aurait le point O (*centre de l'hyperbole*) et facilement les autres éléments de la courbe. Or, cette élimination donne

$$a = \frac{-hh'\,\text{tg.}\,\alpha}{h'\,\text{tg.}\,\alpha \mp h\sqrt{\text{tg.}^2\,\alpha - \text{tg.}^2\,\beta}};$$

c'est-à-dire une valeur unique si, avec tg. $\alpha >$ tg. β, on a

$$h' \operatorname{tg}. \alpha < h\sqrt{\operatorname{tg}.^2 \alpha - \operatorname{tg}.^2 \beta}.$$

Exercices.

1° Deux hyperboles ont leurs asymptotes parallèles; quel est le lieu du point d'intersection où chaque diamètre de l'une rencontre le conjugué de son parallèle dans l'autre?

2° Des hyperboles ont les mêmes asymptotes; quel est le lieu du pied des normales à ces hyperboles, lorsque ces normales sont parallèles?

3° Quel est le lieu des extrémités des diamètres parallèles de toutes les circonférences passant par deux points donnés?

4° Les sécantes menées par chaque point d'une hyperbole à deux points fixes sur cette courbe, interceptent sur l'une ou l'autre asymptote des longueurs constantes.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE LA PARABOLE.

XLIIe & XLIIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Formes diverses de l'équation de la parabole. — Théorème. Les carrés des ordonnées de la parabole, perpendiculaires à l'axe de la courbe, sont proportionnels aux abscisses correspondantes. — Description pointillée de la parabole. — Du foyer & de la directrice obtenus par des considérations analytiques & géométriques. — Scolie. La distance du foyer à un point extérieur *ou* intérieur à la parabole, est supérieure *ou* moindre que la distance de ce point à la directrice. — Problème. Quel est le lieu du point à égale distance d'un point & d'une droite donnés *ou* le lieu du centre du cercle passant par un point & tangent à une droite donnée. — Construction pointillée & continue de la parabole. — Applications. — Exercices.

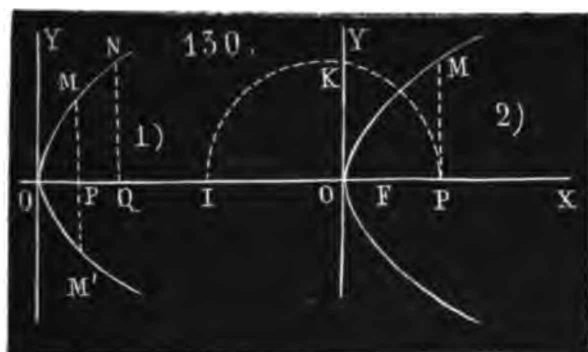
Formes diverses de l'équation de la parabole.

182. Nous avons reconnu (§ 124) qu'un choix convenable et *unique* d'axes rectangulaires, donnait pour la parabole

$$y^2 = 2px \qquad \text{(P)}.$$

Ainsi la courbe [fig. 130, 1)] passe par l'origine, est tangente en ce point à l'axe des Y et s'étend indéfiniment dans le sens des abscisses positives pour $2p > 0$; de plus, de ce que l'on obtient

$$y = \pm \sqrt{2px}$$



la droite OX est *un axe de symétrie* et les considérations qui précèdent nous permettent d'en déduire la forme de la figure.

Si on avait explicitement

$$y^2 = -2px,$$

le lieu serait évidemment situé à la gauche de OY.

Enfin, si nous transportions l'origine en un point quelconque (a, o) de l'axe, (P) deviendrait

$$y^2 = 2p(x + a).$$

N. B. En posant

$$x = \frac{2p}{t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2p}{t}$$

et faisant varier t depuis l'infini jusqu'à zéro, les coordonnées de tous les points de la courbe seraient déterminées, sans avoir de racine à extraire.

THÉORÈME.

Les carrés des ordonnées de la parabole, perpendiculaires à l'axe de la courbe, sont proportionnels aux abscisses correspondantes.

En effet, pour les points (x', y') et (x'', y'') de (P), on a

$$y'^2 = 2px' \quad \text{et} \quad y''^2 = 2px''$$

d'où

$$y'^2 : y''^2 :: x' : x'' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Description pointillée de la parabole.

183. L'équation (P) de la parabole donnant

$$2p : y :: y : x,$$

on en déduit la construction suivante : prenons à gauche de l'origine [fig. 130, 2)]

$$OI = 2p;$$

et pour une abscisse quelconque OP, décrivons sur IP, comme diamètre, une demi-circonférence, l'ordonnée OK, à l'origine, de cette circonférence sera celle de la parabole pour $x =$ OP, car on a

$$OI : OK :: OK : OP \quad \text{ou} \quad 2p : y :: y : x;$$

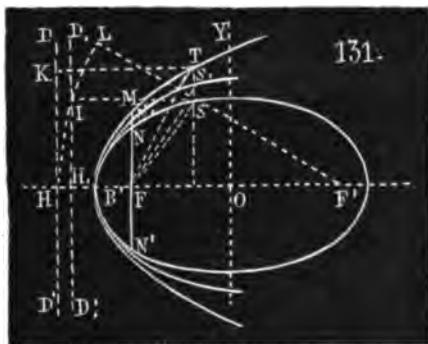
et par suite

$$y^2 = 2px \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE. La forme infinie de la parabole indique au lecteur qu'une droite limitée ne pourra jamais décrire qu'une portion de cette courbe, et la description continue de cette partie dérivera de l'étude du foyer et de la directrice de ce lieu.

Du foyer & de la directrice.

184. Nous laisserons au lecteur le soin d'appliquer les méthodes analytiques déjà exposées pour déterminer les foyers et les directrices de l'ellipse et de l'hyperbole, et pour la théorie analogue de la parabole nous ferons usage de nouvelles considérations *analytiques* et *géométriques* ayant pour base ce fait : *que la parabole peut* (§ 125) *et doit être considérée comme une ellipse* ou *une hyperbole conservant le même paramètre, un même sommet et un foyer constant, mais dont l'axe transverse devient infini.*



En effet, en considérant l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

nous avons, pour l'ordonnée correspondant à l'abscisse

$$x = -\sqrt{a^2 - b^2},$$

c'est-à-dire à l'un des foyers (fig. 131),

$$\text{FN} = \frac{b^2}{a};$$

et par suite, pour la corde NN′ conjuguée de l'axe et passant par le foyer,

$$\text{NN}' = 2\,\frac{b^2}{a} = 2p.$$

Si maintenant nous transportons l'origine au sommet de gauche, en changeant x en $x - a$ et introduisant la corde NN′ dans la transformée en posant $q = p : a$, on obtient

$$y^2 - 2\,px + qx^2 = 0.$$

Ceci posé, considérons une série d'ellipses, ayant même sommet B′, même foyer F, même paramètre $2p$ et dont le grand axe croît indéfiniment, nous aurons, q devenant 0 pour $a = \infty$,

$$y^2 = 2px;$$

c'est-à-dire que le lieu devient une parabole. De plus, on a

$$\mathrm{B'F} = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{p}{1 + \sqrt{1 - q}};$$

or, $q = 0$ donne

$$\textit{limite}\ \mathrm{B'F} = \frac{p}{2}.$$

Ainsi dans la parabole *le foyer est distant du sommet du quart du paramètre* ou *du quart de la corde conjuguée de l'axe et passant par le foyer.*

Quant au rayon vecteur

$$\mathrm{FS} = a + \frac{cx}{a}$$

lorsque l'origine est en O, il devient, après son transfert en B',

$$\mathrm{FS} = a + \frac{c\,(x - a)}{a} = a - c + \frac{c}{a}\,x = \frac{p}{2} + \frac{c}{a}\,x;$$

mais

$$\textit{limite}\ \frac{c}{a} = \textit{limite}\ \frac{a - \frac{p}{2}}{a} = \textit{limite}\ \left(1 - \frac{p}{2a}\right) = \left\{ a = \infty \right\} = 1.$$

Donc

$$\textit{limite}\ \mathrm{FS} = \mathrm{FT} = \frac{p}{2} + x;$$

c'est-à-dire les valeurs qu'on trouverait directement pour B'F et FT, si on appliquait la théorie ordinaire à la parabole

$$y^2 = 2px.$$

D'un autre côté, nous avons antérieurement désigné par d la distance du centre de l'ellipse à la directrice DD' et nous avons obtenu

$$cd = a^2,$$

et cette relation, en posant B'H $= d'$, se transforme en

$$c\,(a + d') = a^2,$$

ou

$$d' = (a - c)\,\frac{a}{c};$$

mais, lorsque l'ellipse se transforme en parabole, on a

$$\textit{limite}\ (a - c) = \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad \textit{limite}\ \frac{c}{a} = 1,$$

donc

$$limite\ d' = \frac{p}{2}.$$

Ainsi la directrice DD' de l'ellipse devient $D_1D'_1$, de telle sorte que le sommet B' est à égale distance du foyer F et de la directrice.

Mais, pendant que FS devient $FT = x + \frac{p}{2}$, la distance SI devient

$$TK = x + B'H_1 = x + limite\ B'H = x + \frac{p}{2},$$

d'où

$$TF : TK :: x + \frac{p}{2} : x + \frac{p}{2} :: 1 : 1;$$

c'est-à-dire une conséquence de

$$SF : SI :: c : a,$$

puisque nous avons obtenu *limite* $(c : a) = 1$.

Donc, *chaque point de la parabole est également distant de son foyer et de sa directrice*, ce que nous savions déjà.

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES. Considérons l'ellipse génératrice et prolongeons le second rayon vecteur F'S de SL = FS, nous aurons

$$F'L = 2a;$$

et la circonférence ayant F' pour centre et $2a$ pour rayon coupera l'axe des foyers en un point H pour lequel on aura toujours

$$B'H = B'F = a - c:$$

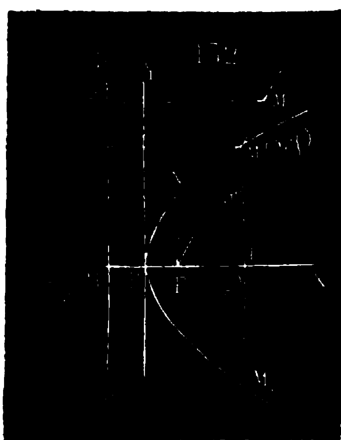
donc, à la limite, B'H se transforme en

$$B'H_1 = \frac{p}{2};$$

et la circonférence HL est une droite $D_1D'_1$ perpendiculaire à l'axe et se confondant avec la directrice. En effet, la distance SL du point S de l'ellipse à la circonférence devient une droite TK abaissée perpendiculairement du point T (*transformée de* S) sur $D_1D'_1$ (*transformée de* DD').

N. B. Les conséquences précédentes subsisteraient en prenant pour point de départ une hyperbole, et ce serait même plus rationnel ; puisque la courbe génératrice ne changerait pas de caractère géométrique : savoir d'être ouverte ; seulement la seconde branche deviendrait virtuelle, en ce sens qu'elle disparaîtrait, comme se transportant à l'infini.

SCOLIE. *La distance d'un point extérieur* ou *intérieur de la parabole à son foyer, est supérieur* ou *moindre que la distance de ce point à la directrice.*



En effet, pour M′ *extérieur*, nous avons (fig. 132).

$$M'S < \textit{oblique}\ M'R < M'M + MR \quad \text{ou} \quad M'F,$$

donc

$$M'F > M'S;$$

et pour M″ *intérieur*

$$M''F < M''N + NF \quad \text{ou} \quad M''N + NS',$$

c'est-à-dire

$$M''F < M''S' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

PROBLÈME.

Quel est le lieu du point à égale distance d'un point et d'une droite donnés ou ***le lieu du centre du cercle passant par un point et tangent à une droite donnée.***

Soit F et DD′ le point et la droite donnés *(figure précédente)*; le lecteur s'aperçoit immédiatement que FB normale à DD′ est un axe de symétrie, aussi la prendrons-nous pour ligne des X; de plus, le point B milieu de la distance FH étant évidemment un point du lieu, sera pris comme origine et les coordonnées seront choisies rectangulaires, par ce qu'il s'agit de distances. Ceci posé, soit p la distance FH, nous aurons, pour un point M quelconque,

$$MF = MR$$

ou, en fonction des variables et de la constante p,

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2},$$

et par suite

$$y^2 = 2px \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire *une parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.*

Construction pointillée & continue de la parabole.

188. La construction pointillée résultera ***de l'intersection d'une perpendiculaire à l'axe avec la circonférence, ayant pour centre le foyer et pour rayon la distance de la directrice au pied de l'ordonnée.***

Quant à la description continue d'une portion de parabole, faisons glisser (fig. 133) un côté A′C′ de l'angle droit d'une équerre A′B′C′ sur la directrice de la

parabole demandée, puis fixant les extrémités d'un cordeau, de longueur A'B', au foyer F et au sommet B' de l'équerre non situé sur la directrice; nous tendrons, au moyen d'un style, ce cordeau le long du catalène A'B'; chaque position de l'équerre donnera un point M du lieu, car on aura toujours

$$FM = cordeau - MB' \quad \text{et} \quad MA' = cordeau - MB',$$

donc

$$FM = MA' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Applications.

186. Voici quelques applications sur les théories précédentes.

PROBLÈME I.

Quel est le lieu du foyer des paraboles ayant une directrice et un point communs (fig. 134, 1))?

Soient DD' et M la directrice et le point communs à toutes ces paraboles, et soit P le foyer de l'une d'elles; nous aurons, par la définition usuelle de la parabole

$$MP = MR = constante.$$

Donc le lieu demandé est *une circonférence ayant M pour centre et pour rayon la distance de ce point à la directrice commune.*

PROBLÈME II.

Construire la parabole dont on connaît deux points et le foyer (fig. 134, 2)).

Soient M, M' et F les points et le foyer donnés; décrivons, de M et M' comme centres et avec MF et M'F pour rayons, des circonférences; leur tangente commune DD' sera la directrice, et par suite le milieu A de la distance FH du foyer à DD' sera le sommet de la courbe, ayant $2p = 2FH$ pour paramètre.

DISCUSSION. Ces deux circonférences *se couperont* toujours, ou du moins *seront tangentes extérieurement*, et par suite il y aura toujours deux tangentes extérieures, donc *deux* solutions.

Lorsque les deux circonférences sont tangentes extérieurement, on doit évidemment rejeter pour directrice la tangente au point de contact des deux circonférences.

PROBLÈME III.

Quel est le lieu du sommet des paraboles passant par un point et ayant une même directrice (fig. 135).

Soient DD′ et M la directrice et le point donnés, A étant un des sommets, en menant AO perpendiculaire à DD′, le point F symétrique de O par rapport à A sera le foyer correspondant et on devra avoir

$$AF = AO.$$

Il est du reste évident que M sera un point du lieu, car on peut le considérer comme le sommet de la parabole ayant DD′ pour directrice et 2QM pour paramètre.

Ceci posé, prenons DD′ et sa perpendiculaire MQ pour axes coordonnés, nous aurons, en posant MQ $= d$,

$$MF = \sqrt{y^2 + (2x - d)^2} \quad \text{et comme} \quad MQ = d,$$

il vient, d'après la nature du lieu générateur du point A,

$$\sqrt{y^2 + (2x - d)^2} = d$$

ou

$$y^2 + 4x^2 - 4dx = 0 \qquad (\varphi)$$

c'est-à-dire *une ellipse* ayant QM pour un des axes en position et en grandeur, tangente à DD′ en Q et passant par le point M.

En rapportant (φ) à ses axes de symétrie, on trouvera CX et CY_1, pour ces droites et

$$y^2 + 4x^2 = d^2$$

sera son équation.

N. B. Le lecteur saisira facilement que le point Q n'a qu'une existence analytique.

PROBLÈME IV.

Obtenir le lieu du foyer des paraboles ayant même sommet et un point commun (fig. 136).

Soient A et M le sommet et le point donnés, F étant le foyer de l'une des paraboles génératrices; DD′ perpendiculaire à AF au point F′, symétrique de F par rapport à A, sera la directrice correspondante.

Ceci posé, prenons AM pour axe des X et sa perpendiculaire AY pour droite des ordonnées; nous aurons, (α, β) étant le point F, $(-\alpha, -\beta)$ pour le point F′; et la direction de AF sera

$$\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha}{\beta}$$

sera celle de DD' qui aura pour équation

$$y + \beta + \frac{\alpha}{\beta}(x + \alpha) = 0;$$

d'où, (d, o) étant les coordonnées du point M,

$$\mathrm{MQ} = \frac{\alpha d + \alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

D'un autre côté

$$\mathrm{MF} = \sqrt{(\alpha - d)^2 + \beta^2};$$

donc, à cause de MF = MQ,

$$\sqrt{(\alpha - d)^2 + \beta^2} = \frac{\alpha d + \alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

et par suite

$$\beta^2 = \frac{\alpha^3}{\frac{d}{4} - \alpha} \qquad (\varphi).$$

(φ) est appelé *cissoïde* et nous engageons le lecteur à le rechercher directement par la génération suivante: *On donne une circonférence, un diamètre* AK $\left(\frac{d}{4}\right)$ *et la tangente* KR: *on demande le lieu du point* I *déterminé par une sécante* AISR, *de telle sorte que l'on ait* AI = SR.

N. B. Le point A n'appartient qu'analytiquement au lieu (φ), mais géométriquement en lui imposant la génération précédente.

PROBLÈME V.

Construire la parabole dont on donne le paramètre, le sommet et un point (fig. 137).

Soient $2p$, A et M le paramètre, le sommet et le point donnés; si du point A comme centre avec $\frac{p}{2}$ comme rayon, nous décrivons une circonférence, elle sera tangente à la directrice et passera par le le foyer inconnu F; et si DD' était cette directrice, le diamètre AH du contact H déterminerait le foyer et on devrait avoir

$$\mathrm{MF} = \mathrm{MR}.$$

Ceci posé, prenons AM et sa perpendiculaire AX pour axes coordonnés, nous aurons, (α, β) étant les coordonnées du point F et (o, d) celle de M,

$$\mathrm{MF} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - d)^2}.$$

D'un autre côté, la directrice DD' aura pour équation

$$y + \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x + \alpha) \quad \text{ou} \quad \beta y + \alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$

et par suite

$$\text{MR} = \frac{d\beta + \alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

donc

$$\sqrt{\alpha^2 + (\beta - d)^2} = \frac{d\beta + \alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

ou, en remplaçant $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ par sa valeur $\frac{1}{2}p$,

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - 2d\beta + d^2} = \frac{d\beta + \frac{1}{4}p^2}{\frac{1}{2}p};$$

puis définitivement, en faisant disparaître le signe $\sqrt{}$,

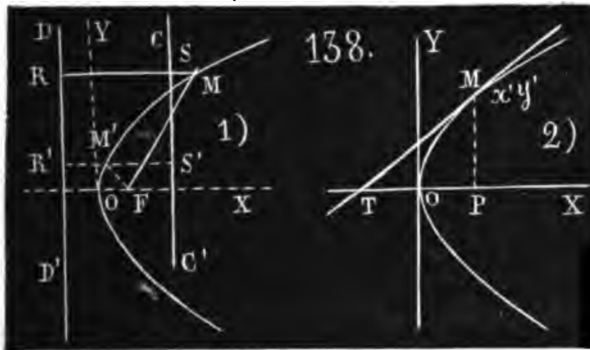
$$4d\beta^2 + 4p^2\beta - dp^2 = 0 \qquad (\varphi).$$

Or, ce lieu (φ) caractérise deux parallèles à l'axe des X et elles déterminent, en coupant la circonférence AH, le foyer F et par suite la directrice DD'.

Nous laisserons au lecteur le soin de discuter la position de ces parallèles par rapport à la circonférence AH, et par suite celui de déterminer le nombre de solutions que peut avoir le problème proposé.

Théorème.

Dans toute parabole, la somme ou la différence des distances d'un point de la courbe au foyer et à une corde perpendiculaire à l'axe, est constante. Quelle est cette constante?



Soient (fig. 138) CC' la corde perpendiculaire à l'axe de la parabole; nous aurons, pour un point M à droite cette corde,

$$\text{MF} = \text{MR} = \text{MS} + \text{SR},$$

d'où

$$\text{MF} - \text{MS} = \text{SR} = \textit{constante} = d,$$

d étant la distance de la corde à la directrice.

Si maintenant nous considérons un point M' à gauche de la corde, il vient

$$\text{M'F} = \text{M'R'} \quad \text{d'où} \quad \text{M'F} + \text{M'S'} = \text{M'R'} + \text{M'S'} = \text{S'R'} = d. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Exercices.

1° Etant donnés une ellipse et un angle droit tournant autour de son sommet; quel est le lieu de l'intersection des tangentes à l'ellipse, lorsque ces droites ont pour point de contact les intersections de l'ellipse avec les côtés de l'angle droit?

2° Un angle constant tourne autour de son sommet placé sur une courbe du second ordre; aux points ou les côtés de l'angle coupent la courbe, on même des tangentes à cette dernière. Quel est le lieu de l'intersection de ces tangentes ?

3° Quel est le lieu de l'intersection de deux droites passant chacune par un point fixe et coupant les asymptotes d'une hyperbole en des points situés sur une tangente à cette dernière courbe ?

4° Si des extrémités d'une corde de la parabole, on abaisse des perpendiculaires sur la tangente au sommet, leur moyenne proportionnelle est la distance du sommet au point de concours de l'axe et de la corde.

5° Si deux cordes d'une parabole sont rectangulaires, les distances de leurs milieux à l'axe ont pour moyenne géométrique la moitié du paramètre.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE LA PARABOLE.

XLIVe & XLVe LEÇON.

SOMMAIRE.

De la tangente. — Théorèmes I. Les points de la tangente à la parabole, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe. — Variations de l'inclinaison de la tangente à la parabole sur son axe. — II. La sous-tangente, sur l'axe de la parabole, vaut le double de l'abscisse du point de contact. — Construction de la tangente en un point de la parabole. — Tangente par un point quelconque : méthode analytique; corde des contacts. — De la normale. — La sous-normale, sur l'axe de la courbe, est constante & vaut le demi-paramètre. — Normale par un point quelconque. — Relations angulaires entre la tangente, les rayons vecteurs du point de contact & la normale. Théorème. La normale de la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact & la parallèle à l'axe. Corolaire. — Construction, au moyen des foyers, de la tangente en un point de la courbe. — Lieu de la projection du foyer de la parabole sur la tangente. Solutions géométrique & analytique. — Construction de la tangente par un point extérieur. — Théorème. Les tangentes menées à la parabole par un point de la directrice sont perpendiculaires entre elles & la corde des contacts passe par le foyer de la courbe. Solutions analytique & géométrique. Corolaire.— Applications. — Exercices.

De la tangente.

187. En appliquant une des méthodes employées pour l'ellipse et l'hyperbole,

on trouvera pour la tangente en un point (x', y') de la parabole, rapportée à son axe et à sa tangente au sommet,

$$yy' = p(x + x') \qquad (T).$$

THÉORÈME.

Les points de la tangente à la parabole, à l'exception du point de contact, sont extérieurs à la courbe.

En effet, le point de contact donne

$$y'^2 = 2px' \qquad (1)$$

et, en combinant, par voie de soustraction, cette égalité avec $(T) \times 2$,

$$y'^2 - 2yy' = -2px;$$

ou, pour un point quelconque (x, y) de la tangente,

$$(y' - y)^2 = y^2 - 2px > 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Variation de l'inclinaison de la tangente. — Sous-tangente.

188. L'expression

$$\alpha = \frac{p}{y'},$$

de la direction de la tangente à la parabole, indique qu'au sommet $(0, 0)$ de la courbe, cette droite est perpendiculaire à l'axe; et, à mesure que le point de contact s'éloigne, α s'approche d'être *nulle;* c'est-à-dire que la tangente, pour $y' = \infty$, est parallèle aux diamètres qui sont tous parallèles à l'axe : mais l'ordonnée à l'origine

$$y = \frac{px'}{y'} = \sqrt{\frac{px'}{2}}$$

de la tangente, devenant *infinie* dans le même cas, cette droite n'existe plus et par suite la parabole n'a point d'asymptote, ce que nous savions déjà.

THÉORÈME.

La sous-tangente sur l'axe de la parabole, vaut le double de l'abscisse du point de contact.

En effet, la tangente

$$yy' = p(x + x')$$

donne, en posant $y = 0$,

$$x = \text{OT} = -x';$$

et par suite

$$\text{PT} = 2x' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Construction de la tangente.

I. *Au point* (x', y') *de la parabole* : on tracera l'ordonnée PM du point de contact ; puis prenant, en sens inverse de l'abscisse,

$$OT = OP$$

on joindra TM, ce sera la tangente demandée.

II. *Par un point extérieur.* D'abord il est évident que

$$1) \quad y''y' = p\,(x'' + x') \quad \text{et} \quad y'^2 = 2px' \quad (2$$

sont les deux équations donnant le point (x', y') inconnu de contact : on en déduit

$$y' = y'' \pm \sqrt{y''^2 - 2px''} \quad \text{et} \quad x' = \frac{y''^2 - px'' \pm y''\sqrt{y''^2 - 2px''}}{p};$$

et par suite la condition de position du point (x'', y'') par rapport à la parabole, pour obtenir *deux*, *une* ou *zéro* tangentes.

Corde des contacts. Le lieu en (x', y')

$$y''y' = p\,(x'' + x') \quad \text{ou} \quad y''y = p\,(x'' + x)$$

est bien la corde des contacts ; d'où, pour ses coordonnées à l'origine,

$$\left.\begin{aligned} y &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} x &= -x'', \\ y &= \frac{px''}{y''}; \end{aligned}\right.$$

donc cette droite est fixée, et ses intersections avec la courbe déterminent les points de contact des tangentes tracées du point (x'', y'').

N. B. Nous reviendrons sur cette dernière méthode à l'occasion de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'origine de ce dernier.

De la normale.

189. Cette droite, au point (x', y') de la parabole

$$y^2 = 2px,$$

aura évidemment pour caractérisation analytique

$$yy' = -\frac{y'}{p}(x - x') \qquad (N).$$

De plus, comme $y = 0$ donne

$$x' - x = p;$$

nous en déduisons ce théorème : *La sous-normale de la parabole sur l'axe de la courbe, est constante et vaut le demi-paramètre ;* cette propriété donne une construction aussi simple qu'élégante de la tangente en un point (x', y') de la courbe.

Normale par un point quelconque.

190. Soit (x'', y'') le point donné et (x', y') le pied de la normale sur la courbe ; nous aurons

$$1)\qquad y'^2 = 2px' \quad \text{et} \quad y'' - y' = -\frac{y'}{p}(x'' - x') \qquad (2.$$

Ainsi le point (x', y') est à l'intersection des lieux (1) et (2) en (x', y') : le premier est la parabole donnée, et (2) n'est autre qu'une *hyperbole équilatère* passant par (x'', y'') et dont les asymptotes sont parallèles aux axes coordonnés actuels. De plus, cette hyperbole ne pourra couper la parabole en plus de trois points, car l'élimination de (x') entre (1) et (2) donne

$$y'^3 + 2p(p - x'')y' - 2p^2y'' = 0 \qquad (3).$$

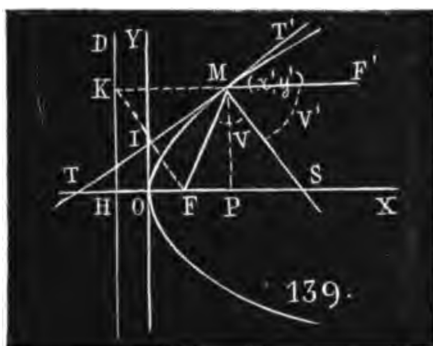
Donc, d'un point donné sur le plan d'une parabole, *on ne pourra tracer à cette courbe qu'une* ou *trois normales*, puisque (3) n'est satisfaite que par *une* ou *trois* valeurs réelles de y'.

N. B. Le point (x'', y'') situé sur l'axe de la parabole, réduit l'hyperbole à ses asymptotes.

Relations angulaires entre la tangente, les rayons vecteurs du point de contact & la normale.

THÉORÈME.

191. *La normale de la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle à l'axe* (fig. 139).



Cette propriété est une conséquence analytique et géométrique de ce fait que la parabole peut être considérée comme le résultat de la transformation que subit une des courbes à centre du second ordre, lorsque, conservant un de ses foyers et le sommet correspondant, l'axe transverse devient infini. En effet, le second foyer F' détermine alors une parallèle à l'axe pour le second rayon vecteur du point de contact.

Du reste, cette propriété s'établit géométriquement de la manière suivante : on a, *numériquement*,

$$OT = OP = x' \quad \text{et} \quad OF = \frac{p}{2};$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}FT = x' + \frac{p}{2}; \\ \text{et comme} \\ FM = x' + \frac{p}{2},\end{array}\right\} \text{on obtient } FM = FT;$$

et par suite

$$\left.\begin{array}{l}FMT = FTM; \\ \text{mais, comme correspondants,} \\ FTM = F'MT',\end{array}\right\} \text{donc } FMT = F'MT';$$

d'où, comme compléments de ces angles,

$$V = V' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. *La tangente en un point de la parabole est aussi la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et le prolongement de la parallèle à l'axe menée par ce point.*

Ce corollaire serait une conséquence directe de la parabole déduite d'une hyperbole.

Construction, par les foyers, de la tangente en un point de la courbe.

192. Traçons le rayon vecteur FM et prenons sur l'axe (fig. 139)

$$FT = FM;$$

TM sera la tangente au point M, car évidemment

$$TMF = TMF' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lieu de la projection du foyer de la parabole sur la tangente.

193. Le lieu demandé dans l'ellipse étant la circonférence décrite sur le grand axe, on reconnaît immédiatement que ce cercle, qui coupe l'axe transverse au sommet O devient, pour $a = \infty$, une perpendiculaire à cet axe, ou la tangente au sommet.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE. DH étant la directrice, on a

$$MF = MK;$$

mais la tangente MT donne

$$IMF = IMK;$$

et par suite I est le milieu de FK et comme O est le point analogue de FH, la droite OI est parallèle à DH : donc, les points I constituent bien la tangente en O.

SOLUTION ANALYTIQUE. Nous avons évidemment

$$y'^2 = 2px', \quad yy' = p(x + x') \quad \text{et} \quad py = -y'\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

pour caractériser la projection du foyer F sur la tangente; et par suite *en éliminant les constantes variables* x' *et* y' *entre ces relations*, on aura l'équation du lieu.

Or, les génératrices donnent

$$y' = \frac{-2px}{2x - p} \quad \text{et} \quad x' = -\frac{2y^2}{2x - p} - x;$$

d'où, en substituant dans l'équation de condition,

$$x[4y^2 + (2x - p)^2] = 0.$$

Or, la solution

$$4y^2 + (2x - p)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 2x - p = 0, \end{cases}$$

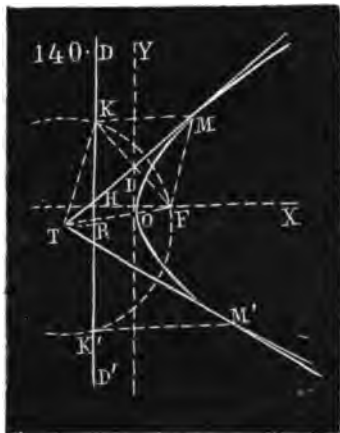
qui caractérise le foyer, doit évidemment être rejetée; et il ne reste plus que

$$x = 0;$$

c'est-à-dire *la tangente au sommet*. C. Q. F. D.

Construction de la tangente par un point extérieur.

194. Soit T (fig. 140) le point donné; de ce point comme centre et avec TF pour rayon, décrivons une circonférence coupant la directrice DD' au point K : la parallèle KM à l'axe de la parabole, donne le point de contact M de la tangente TM. En effet



$$TF = TK \quad \text{et} \quad MF = MK$$

indiquent que TM est perpendiculaire au milieu de KF; donc TM est la bissectrice de l'angle FMK, ou la tangente en M.

N. B. Le lecteur démontrera facilement que tous les points de TM, à l'exception de M, sont extérieurs à la parabole.

DISCUSSION. I. T *extérieur* donne

$$TR < TF;$$

donc, la circonférence TF coupera la directrice DD' en deux points K et K', et par suite *deux* parallèles KM et K'M' à l'axe OF, ou *deux tangentes*.

II. De T *sur la parabole*, on déduit

$$TR = TF ;$$

alors la circonférence TF *tangente* à la directrice ne détermine qu'*une seule tangente*.

II. Enfin, pour le point T *intérieur* à la courbe

$$TR > TF ;$$

c'est-à-dire que le cercle TF ne coupe plus la directrice : donc, *pas de tangente*.

198. REMARQUE. La construction précédente n'est du reste que celle de l'ellipse *ou* de l'hyperbole, modifiée par les hypothèses qui la transforment en parabole.

En effet, la circonférence de centre T et de rayon TF continue à subsister; quant à la seconde circonférence : son centre se trouve transporté à l'*infini* sur l'axe OF ; et son rayon, devenu *infini*, la transforme en une droite DD' perpendiculaire à l'axe de la courbe et coupant cet axe en H avec la condition OH = OF. Donc c'est la directrice, et comme complément le second rayon vecteur est devenu KM parallèle à l'axe. C. Q. F. D.

THÉORÈME.

Les tangentes menées à la parabole par un point de la directrice sont perpendiculaires entre elles, et la corde des contacts passe par le foyer de la courbe.

SOLUTION ANALYTIQUE. En considérant la parabole

$$y^2 = 2px \qquad (P),$$

les coordonnées du point donné seront $\left(-\frac{p}{2}, y''\right)$.

Ceci posé, nous aurons pour la corde des contacts

$$yy'' = p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

dont l'abscisse à l'origine caractérise bien le foyer.

D'un autre côté, soit α la direction de la tangente, tracée du point $\left(-\frac{p}{2}, y''\right)$, son équation sera

$$y - y'' = \alpha\left(x + \frac{p}{2}\right) \quad \text{ou} \quad y = \alpha x + \left(y'' + \frac{p\alpha}{2}\right).$$

Or, en éliminant y entre cette relation et (P), on obtient

$$\alpha^2x^2 + 2\left[\alpha\left(y'' + \frac{p\alpha}{2}\right) - p\right]x + \left(y' + \frac{p\alpha}{2}\right)^2 = 0;$$

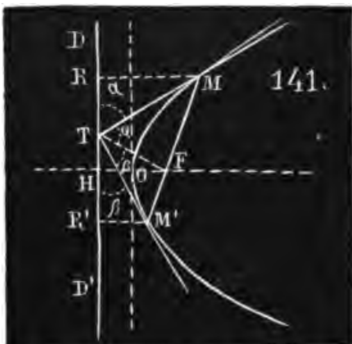
et par suite pour déterminer α, car les valeurs de x doivent être égales,

$$\alpha^2 + \frac{2y'}{p}\alpha - 1 = 0,$$

d'où

$$\alpha'\alpha'' = -1;$$

c'est-à-dire que *ces tangentes sont perpendiculaires entre elles.* C. Q. F. D.



SOLUTION GÉOMÉTRIQUE (fig. 141). Les triangles TMR et TMF sont égaux : car on a

$$MR = MF, \text{ MT } \textit{commun} \text{ et } \widehat{RMT} = TMF;$$

donc les angles marqués α sont égaux, et celui

$$TFM$$

est droit comme son homologue en R.

Pour les mêmes motifs, les angles en β sont aussi identiques et par suite TFM' $= 90°$.

Ainsi de

$$TFM + TFM' = 180°,$$

on déduit que MFM' est une droite; et de

$$2\alpha + 2\beta = 180° \text{ on a } \alpha + \beta = 90°$$

ou

$$MTM' = 90.$$

Donc, *les tangentes* TM *et* TM' *sont bien rectangulaires entre elles.*

COROLLAIRE. *La corde MM' des contacts des tangentes précédentes est perpendiculaire à la droite menée du foyer à leur point de concours.*

Applications.

196. Voici quelques applications complètement développées.

THÉORÈME.

Les paraboles égales construites sur un même axe et dirigées dans le même sens, sont asymptotes l'une de l'autre.

En effet, soient les deux paraboles

$$P) \quad y^2 = 2px \quad \text{et} \quad y^2 = 2p\,(a - a) \quad (P';$$

on a, pour une même abscisse,

$$\frac{y'^2}{Y'^2} = \frac{x'}{x'-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{x'}},$$

d'où, x convergeant vers l'infini,

$$limite \left(\frac{y'^2}{Y'^2}\right) = 1;$$

et par suite

$$limite\ y' = limite\ Y' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En opérant par voie de différence, on aurait

$$y'-Y' = \sqrt{2px'} - \sqrt{2p(x'-a)} = \sqrt{2p}\left(\sqrt{x'}-\sqrt{x'-a}\right) = \sqrt{2p}\,\frac{a}{\sqrt{x'}+\sqrt{x'-a}};$$

d'où, en posant $x' = \infty$,

$$limite\ (y'-Y') = 0 \quad \text{et} \quad limite\ y' = limite\ Y'.$$

SCOLIES I. Les relations (P) et (P') donnant

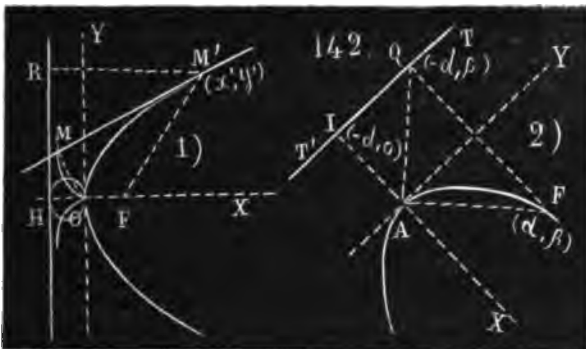
$$y'^2 - Y'^2 = 2pd \quad \text{ou} \quad (y'-Y')(y'+Y') = 2pa;$$

on en déduit que : *toute sécante perpendiculaire à l'axe et limitée à la parabole extérieure, est divisée par celle intérieure en deux segments dont le rectangle est constant et vaut celui du paramètre commun et de la distance des deux sommets.*

II. *Les tangentes à l'origine d'un même diamètre sont parallèles.*

PROBLÈME I.

Déterminer le lieu de la projection du sommet de la parabole sur ses tangentes (fig. 142, 1).



Un point se déduit immédiatement du mode de génération : c'est le sommet O de la parabole directrice. De plus, la tangente ayant pour limite de sa direction, une parallèle à l'axe OX, la projetante du sommet O a pour limite OY; c'est-à-dire que le lieu s'étendra à l'infini dans le sens des deux Y, car la parabole n'a pas d'asymptote.

Ceci posé, soit

$$y^2 = 2px \qquad \text{(D)}$$

la parabole directrice ;

$$(G) \qquad yy' = p(x + x') \quad \text{et} \quad py = -y'x \qquad (G');$$

seront évidemment la tangente génératrice M'M et la projetante OM, sur cette droite, du sommet O de (D). De plus

$$y'^2 = 2px' \qquad (1)$$

sera la relation de condition réglant le mouvement du point M'.

Donc, en éliminant les *constantes variables* x' et y' entre (G), (G') et (1), nous obtiendrons l'équation du lieu demandé.

Or, (G') donne

$$y' = \frac{-py}{x},$$

d'où, en substituant dans (1),

$$x' = \frac{py^2}{2x^2};$$

et par suite (G) devient

$$y^2 = \frac{-2x^3}{p + 2x} = \frac{(-x)^3}{\frac{p}{2} - (-x)} \qquad (\varphi).$$

Donc *le lieu est une cissoïde dont le sommet est celui de la parabole et dont la circonférence directrice est celle décrite sur la distance de ce sommet à la directrice de la parabole, comme diamètre.*

N. B. *La tangente*

$$x = -\frac{p}{2}$$

à la circonférence précitée est bien asymptote de (φ).

PROBLÈME II.

Quel est le lieu du foyer des paraboles ayant même sommet & une tangente commune [fig. 142, 2)]?

Soient A et TT' le sommet et la tangente donnés, et prenons pour axes coordonnés : AX perpendiculaire à TT' et AY parallèle à cette même droite.

Ceci posé, F étant un des points du lieu en (α, β), nous aurons

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \qquad (\text{AF})$$

pour l'axe de la parabole correspondante ; et, d étant la distance du sommet A à la tangente TT',

$$(-d, \beta)$$

seront évidemment les coordonnées de la projection de F sur TT', c'est-à-dire un point de la tangente au sommet de cette parabole, donc

$$y = \frac{\beta}{-d} x \qquad (\text{AQ})$$

sera cette droite.

Or, AF et AQ doivent se couper à angle droit, donc

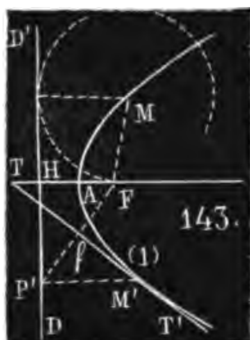
$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\beta}{-d} = -1 \quad \text{ou} \quad \beta^2 = d\alpha \qquad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu est une parabole ayant* A *pour sommet*, AX *pour axe et* d *pour paramètre.*

N. B. Le lecteur aura déjà remarqué que le point A du lieu (φ) n'a qu'une existence analytique, en tant du moins que l'on ne considère que les conditions ayant donné (φ).

PROBLÈME III.

Construire la parabole dont on connait le foyer, une tangente & un point [fig. 143, 1)].



Soient F, M et TT' le foyer, le point et la tangente donnés.

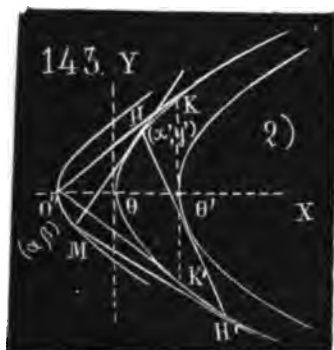
La directrice DD' doit être tangente à la circonférence ayant M comme centre et MF pour rayon, et passer par P' symétrique de F par rapport à la tangente TT'; donc, cette directrice est déterminée et a même une double solution.

Enfin FH et P'M' perpendiculaires à la directrice déterminent la première : *le sommet* A et la seconde le point de contact M' de la tangente TT'.

N. B. Le problème admet donc deux solutions et évidemment il faut que le point et le foyer donnés soient d'un même côté de la tangente.

PROBLÈME IV.

Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés tangents à une parabole, déterminent une corde de contact tangente à une seconde parabole dont l'axe coïncide avec celui de la première [fig. 143, 2)]?



D'abord la tangente au sommet O' de la parabole intérieure déterminera les génératrices du lieu, pour le point O'' situé sur l'axe.

Ceci posé, soient

$$\text{P)} \quad y^2 = 2px \quad \text{et} \quad y^2 = 2p'(x-a) \quad \text{(P'}$$

les équations des deux directrices OK et O'K'.

La tangente génératrice au point (x', y') a pour caractérisation

$$yy' = p(x + x'),$$

et, comme elle passe par le point (α, β),

$$\beta y' = p(\alpha + x') \quad \text{ou} \quad \beta y = p(\alpha + x) \qquad \text{(C)}$$

sera l'expression de la corde des contacts H'H'.

Or, les abscisses des points d'intersection de (C) avec (P') sont données par

$$p^2x^2 + 2(p^2\alpha - p'\beta^2)x + (p^2\alpha^2 + 2p'a\beta^2) = 0;$$

et, comme elles doivent être égales, nous avons

$$\beta^2 (p'\beta^2 - 2p^2\alpha - 2p^2a) = 0.$$

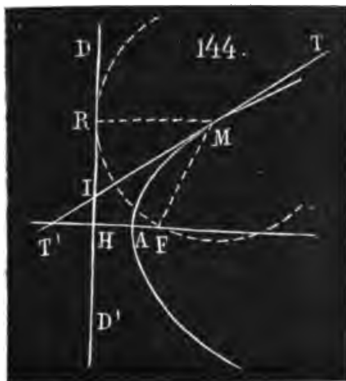
C'est-à-dire que

$$(\varphi) \quad \beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad p'\beta^2 = 2p^2(\alpha + a) \quad (\varphi');$$

or, (φ) caractérisant deux droites confondues avec OX est évidemment une solution étrangère ; quant à (φ'), *c'est une parabole dont le sommet est en* O'' *symétrique de* O' *par rapport à* (O) *et égale à* (P) *et à* (P') *lorsque ces derniers sont identiques.*

PROBLÈME V.

Décrire la parabole dont on connaît : la directrice DD', une tangente TT' & son point de contact M (fig. 144).

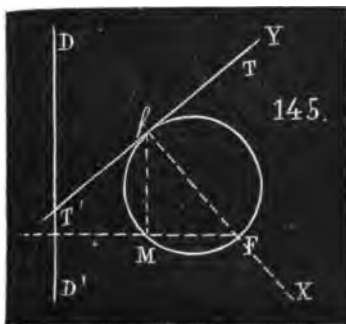


D'abord le foyer F est déterminé par la droite MF donnant TT' pour bissectrice de l'angle RMF et par la circonférence, ayant M pour centre et décrite avec le rayon MR, distance du point M à la directrice.

De la position du foyer F, on déduit l'axe FH perpendiculaire à DD'; et par suite le sommet A et le paramètre $2p = 2$FH.

PROBLÈME VI.

Que est le lieu du sommet des paraboles ayant une tangente et un foyer communs (fig. 145) !



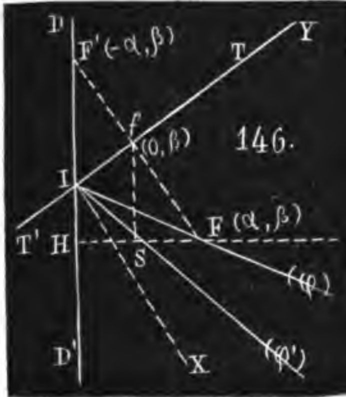
Soient TT' et F la tangente et le foyer donnés : déjà la projection f de F sur TT' sera un point du lieu, et c'est celui donné par la parabole ayant FX pour axe et 4Ff pour paramètre.

Maintenant soit M un des sommets demandés : MF et Mf devront être l'axe et la tangente correspondant à une certaine parabole génératrice, et comme ces droites doivent être rectangulaires, le lieu est celui du sommet d'un angle droit dont les côtés passent par deux points fixes F et f : donc, *c'est la circonférence décrite sur* Ff *comme diamètre.*

PROBLÈME VII.

Déterminer le lieu du foyer des paraboles ayant même directrice DD' et une tangente commune TT' (figure 146).

Chaque point du lieu devant avoir son symétrique sur DD' par rapport à TT', le lieu ne



peut être que la droite IF symétrique de DD' par rapport à la tangente.

Pour procéder analytiquement, nous prendrons TT' et sa perpendiculaire IX pour axes coordonnés, et en représentant par

$$y = ax \qquad (\mathrm{DD'})$$

la directrice DD'; nous aurons, (α, β) étant les coordonnées d'un des foyers F,

$$\beta = -a\alpha \qquad (\varphi)$$

pour le lieu demandé, puisque le point F' ou $(-\alpha, \beta)$ doit être situé sur la directrice; seulement le point I doit évidemment être rejeté.

Problème VIII.

Quel est le lieu du sommet des paraboles ayant même directrice & une tangente commune (fig. 146)?

En conservant les notations précédentes

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha) \qquad (\mathrm{G})$$

sera l'équation des axes des paraboles génératrices *ou* d'une génératrice du lieu, et la seconde génératrice fS sera évidemment

$$y = ax + \beta \qquad (\mathrm{G'}).$$

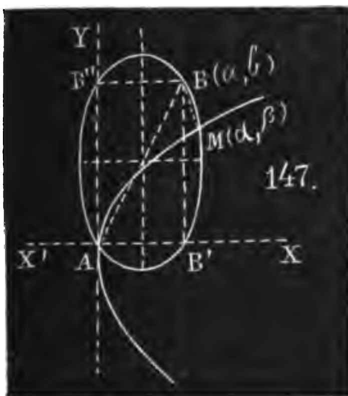
Donc, en éliminant α et β entre (G), (G') et (φ) du problème précédent, nous aurons, pour le lieu demandé,

$$y = -a^2 x \qquad (\varphi'),$$

c'est-à-dire *une droite passant par l'origine.*

Problème IX.

On demande le lieu des pieds des normales menées d'un même point à toutes les paraboles ayant même sommet et même axe (fig. 147).



Considérons la parabole, rapportée à son axe et à sa tangente au sommet,

$$y^2 = 2px \qquad (\mathrm{P});$$

$2p$ est ici *une constante variable.*

Remarquons d'abord que $p = 0$ réduit la parabole à son axe, donc la projetante du point B donné sur OX, fixe un point B' du lieu; $p = \infty$ convertit la courbe en la tangente au sommet et par suite on en déduit encore B''; enfin, parmi toutes les paraboles, celle qui passe par le point B détermine ce point pour un de ceux de la ligne cherchée.

Ceci posé, soient (a, b) les coordonnées de B et (α, β) celles d'un point quelconque M du lieu, nous aurons

$$y - \beta = -\frac{\beta}{p}(x - \alpha)$$

pour la normale au point (α, β) de (P); et, comme elle passe par le point B,

$$b - \beta = -\frac{\beta}{p}(a - \alpha) \quad \text{(G)}$$

sera une génératrice, ici hyperbolique, du lieu demandé.

D'un autre côté la situation du point (α, β) donne spontanément pour seconde génératrice

$$\beta^2 = 2p\alpha \qquad \text{(G')}.$$

Or, l'élimination de la constante variable p entre (G) et (G') donne

$$\beta^2 + 2\alpha^2 - 2a\alpha - b\beta = 0 \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire *une ellipse passant par les points* B', B'' *et* B, *et ayant pour centre le milieu de* AB.

N. B. La courbe (φ) passe également par l'origine A dont l'existence, pour la génération indiquée, n'est qu'analytique; cependant sa conception géométrique peut s'expliquer comme trait d'union entre les points donnés par les paraboles dirigées suivant OX et celles ayant OX' pour axe.

PROBLÈME X.

Déterminer le lieu du point milieu de la corde de contact des tangentes à une parabole et formant un angle constant V ?

Soit

$$y^2 = 2px \qquad \text{(D)}$$

la directrice, en désignant par (x', y') et (x'', y'') les points de contact des côtés de l'angle V, nous aurons

$$\text{(G)} \qquad 2x = x' + x'' \quad \text{et} \quad 2y = y' + y'' \qquad \text{(G')}$$

pour les génératrices du lieu cherché; et évidemment pour équation de condition, règlant les mouvements des points de contact,

$$(1) \qquad y'^2 = 2px', \qquad\qquad y''^2 = 2px'' \qquad (2),$$

avec

$$\text{tg. V} = \frac{p\,(y'' - y')}{p^2 + y'y''} \qquad (3);$$

et par suite, il ne reste qu'à éliminer x', y', x'' et y'' entre (G), (G'), (1), (2) et (3).

Or, en carrant (G') et simplifiant au moyen de (1), (2) et (G), on obtient

$$y'y'' = 2\,(y^2 - px);$$

et, en retranchant du carré de (G') quatre fois la relation précédente, on trouve

$$y'' - y' = 2\sqrt{2px - y^2};$$

donc (3) se transforme en

$$\operatorname{tg}. V = \frac{2p\sqrt{2px - y^2}}{p^2 + 2y^2 - 2px},$$

ou

$$2 \operatorname{tg}. V. y^2 - 2p \operatorname{tg}. V. x + p^2 \operatorname{tg}. V = 2p\sqrt{2px - y^2} \qquad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu demandé est du quatrième degré;* et se rapporte en même temps aux deux angles V et 180 — V.

CAS SPÉCIAL. $V = 90^\circ$ donne

$$2y^2 - 2px + p^2 = 0,$$

ou

$$y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right) \qquad (\varphi').$$

Parabole unique dont le sommet est le foyer de (P).

PROBLÈME XI.

Quel est le lieu de la projection du foyer de la parabole sur ses normales?

Soit la parabole directrice

$$y^2 = 2px \qquad (D);$$

nous avons pour les génératrices

$$G) \quad y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \quad \text{et} \quad y = \frac{p}{y'}\left(x - \frac{p}{2}\right) \qquad (G';$$

et pour équation de condition

$$y'^2 = 2px' \qquad (1).$$

En éliminant x' et y' entre (G), (G') et (1) nous obtiendrons le lieu demandé.

Or, (G') peut s'écrire

$$y' = \frac{p}{y}\left(x - \frac{p}{2}\right) = \frac{pK}{y},$$

d'où, à cause de (1),

$$x' = \frac{pK^2}{2y^2};$$

et par suite (G) devient

$$y - p\frac{K}{y} = -\frac{K}{y}\left(x - \frac{pK^2}{2y^2}\right),$$

ou

$$y^4 - K(p - x)y^2 = \frac{pK^3}{2};$$

donc

$$y^2 = \frac{K(p - x) \pm Kx}{2};$$

et par suite, en séparant et remplaçant K par sa valeur,

$$(\varphi) \qquad y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right) \quad \text{et} \quad y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \qquad (\varphi').$$

Or, le lieu (φ') qui caractérise le foyer, doit évidemment être rejeté comme étranger à la génération indiquée; et (φ) représente *une parabole ayant pour sommet le foyer de* D *et pour paramètre le quart de celui de la directrice.*

Exercices.

1° Une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur l'axe d'une parabole; quel est le lieu de l'intersection des normales à la parabole par ses points de rencontre avec la sécante?

2° Une parabole se meut parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole initiale; quel est le lieu du point de contact des tangentes tracées par le sommet primitif à la parabole mobile?

3° Quel est le lieu du point dont la somme des carrés des distances à une parabole donnée, est constante?

4° Un angle constant tourne autour de son sommet placé sur une courbe du second degré, aux points où les côtés de l'angle coupent la courbe, on mène des tangentes à cette dernière. Quel est le lieu du point de concours de ces tangentes?

5° Par un point pris sur l'axe d'une parabole, on mène des parallèles aux tangentes: quel est le lieu du point où chacune d'elles rencontre le rayon vecteur du point de contact correspondant.

6° Par le foyer d'une parabole on mène des droites faisant un angle constant avec les tangentes; quel est le lieu de l'intersection de chaque droite avec la tangente correspondante?

7° Si par le sommet A d'une parabole on mène une corde quelconque AM, et par le point M une perpendiculaire MB à cette corde, terminée à l'axe AB de la courbe; la distance PB entre le point B et le pied de l'ordonnée du point M, sera égale au paramètre.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre.

DE LA PARABOLE.

XLVI[e] LEÇON.

SOMMAIRE.

Des diamètres. — Théorème I. Dans la parabole, le produit des directions d'un diamètre & de sa corde, par rapport à l'axe de la courbe, est constant. — Théorème II. Les cordes d'un diamètre sont parallèles à la tangente menée par l'origine de ce dernier. — Parabole en coordonnées obliques spéciales. — Pôle et polaire de la parabole. — Construction de la parabole en coordonnées obliques spéciales. — Théorème. Si d'un point intérieur *ou* extérieur à la parabole : on trace un diamètre et sa corde conjuguée, le rectangle des deux parties de la corde vaut celui du paramètre de ce diamètre et de la distance du point à la courbe, mais comptée sur ce diamètre. — Problème. Construire la parabole connaissant la direction de l'axe et trois points. — Exercices.

Des diamètres.

197. Si nous considérons la parabole

$$y^2 = 2px \qquad (P),$$

et le système de cordes parallèles

$$y = mx + n \qquad (c);$$

nous en déduisons, par une des méthodes déjà exposées,

$$y = \frac{p}{m} \qquad (d)$$

pour le diamètre correspondant.

Ainsi *les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.*

RÉCIPROQUEMENT, *toute parallèle à l'axe de la parabole est un diamètre de cette courbe.*

En effet, de

$$y = \delta,$$

on obtient

$$m = \frac{p}{\delta}$$

pour la direction des cordes correspondantes.

THÉORÈME I.

Dans la parabole, le produit des directions d'un diamètre et de sa corde, par rapport à l'axe de la courbe, est constant.

En effet, la direction d'un diamètre étant

$$0,$$

on aura, m n'étant pas infini,

$$0.\, m = 0.$$

On démontre également ce théorème en considérant encore l'ellipse comme une dégénérescence (§ 184) de l'ellipse *ou* de l'hyperbole; en effet, m et δ étant les directions d'une corde et de son diamètre, nous avons trouvé [§ 137, Th. I; § 168, Th. I]

$$m\delta = \mp \frac{b^2}{a^2} = \mp \frac{p}{a},$$

p étant le demi-paramètre de l'ellipse *ou* de l'hyperbole. Or, en posant $a = \infty$, on obtient

$$m\delta = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE. Ce théorème commun aux trois courbes du second ordre, présente cependant une anomalie : supposons qu'il s'agisse des *cordes principales*, c'est-à-dire de celles normales à leur diamètre; nous aurons, pour le produit $m\delta$,

$$\text{tg. } 0^\circ \text{ tg. } 90^\circ = 0.\, \infty = 1.$$

Car, quel qne soit A, $\text{tg.A} \text{cotg.A} = 1$ donne

$$\text{tg. } 0^\circ. \text{ tg. } 90^\circ = \text{tg. } 0^\circ. \text{ cotg. } 0^\circ = 1.$$

Cette dernière relation n'existe, pour le théorème ci-dessus, que pour $a = b$; et encore seulement dans le cas de *l'hyperbole équilatère.*

THÉORÈME II.

Les cordes d'un diamètre sont parallèles à la tangente menée par l'origine de ce dernier.

Car le diamètre

$$y = \delta,$$

donne, pour la direction de ses cordes,

$$m = \frac{p}{\delta};$$

c'est-à-dire *la direction de la tangente au point* (x', δ).

N. B. Le lecteur déduira de ce théorème, une construction facile pour tracer une tangente parallèle à une droite donnée.

Parabole en coordonnées obliques spéciales.

198. Considérons la parabole

$$y^2 = 2px \qquad (P)$$

rapportée à son axe et à sa tangente au sommet; et déduisons-en le système de coordonnées obliques n'altérant pas cette forme. A cet effet, désignons par (a, b) la nouvelle origine et par α, α' les angles formés par l'X et l'Y nouveaux avec l'ancien axe des abscisses positives, on devra changer

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} a + x \cos.\alpha + y \cos.\alpha', \\ b + x \sin.\alpha + y \sin.\alpha'; \end{matrix}\right.$$

d'où, pour (P),

$$y^2 \sin^2\alpha' + 2\sin\alpha\sin\alpha'.xy + \sin^2\alpha.\,x^2 + \begin{matrix} 2b\sin\alpha' \\ -2p\cos.\alpha' \end{matrix}\Bigg|\, y + \begin{matrix} 2b\sin\alpha \\ -2p\cos\alpha \end{matrix}\Bigg|\, x + \left.\begin{matrix} b^2 \\ -2pa \end{matrix}\right\} = 0;$$

et par suite, α, α', a et b seront déterminés par les relations

$$\sin.^2\alpha = 0, \quad \sin.\alpha\sin.\alpha' = 0, \quad b\sin.\alpha' - p\cos.\alpha' = 0 \quad \text{et} \quad b^2 - 2pa = 0.$$

Or, la première de ces conditions satisfait à la seconde et exige

$$\alpha = 0^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = 180^\circ;$$

c'est-à-dire que *le nouvel axe des* X *est un diamètre*, de plus, *l'origine est un point de la courbe*, car on doit avoir

$$b^2 - 2pa = 0.$$

Enfin, de

$$b\sin.\alpha' - p\cos.\alpha' = 0,$$

on obtient

$$\text{tg. } \alpha' = \frac{p}{b};$$

et par suite *l'axe des* Y *nouveaux est la tangente au point* (a, b).

Ceci posé, en considérant

$$\alpha = 0^\circ$$

l'équation transformée de la parabole devient

$$y^2 \sin.^2 \alpha' = 2px;$$

d'où, à cause de la valeur de tg. α',

$$y^2 = 4\left(x + \frac{p}{2}\right)x,$$

ou

$$y^2 = 2p'x \qquad (\text{P}').$$

Scolie. La quantité $2p'$ est désignée sous le nom de *paramètre du diamètre pris pour* X, et on reconnaît qu'il a pour valeur *quatre fois la distance du foyer au point* (a, b).

199. Nous engageons le lecteur à effectuer les calculs relatifs à la réciproque du § précédent.

200. La parabole en coordonnées obliques, quoique spéciales, ayant la même forme que la courbe à l'axe et à la tangente au sommet, on en déduit :

I. *Les carrés des ordonnées conjuguées d'un diamètre sont entre eux comme les abscisses correspondantes.*

II. *La tangente au point* (x', y') *aura pour direction*

$$\alpha = \frac{p'}{y'};$$

pour équation

$$yy' = p'(x + x');$$

et pour sous-tangente

$$2x'.$$

Pôle & polaire de la parabole.

201. Prenons pour axe des Y, la tangente parallèle à la polaire et pour axe des abscisses le diamètre du point de contact,

$$y^2 = 2p'x$$

sera alors l'équation de la parabole.

Ceci posé, la tangente du point (x'', y'') de la polaire, aura pour corde de contact

$$y''y = p'(x'' + x)$$

admettant *la constante*

$$-x''$$

pour abscisse à l'origine ; et comme ce résultat est indépendant de y'', *les cordes des contacts des tangentes, menées à la parabole, par les points de la droite*

$$x = x'',$$

coupent l'axe des X *en un point constant ; c'est-à-dire au pôle.*

Construction de la parabole en coordonnées obliques spéciales.

202. Soient MX et MY (fig. 148) un diamètre de la parabole et sa tangente en M et appelons $2p'$ le paramètre du diamètre MX.

Ceci posé, traçons MF de telle sorte que

$$Y'MF = YMX,$$

et prenons

$$MF = \frac{1}{2}p',$$

le point F *sera le foyer* ; puis traçons DD' perpendiculaire à MX et distant de M de MR = MF, *cette droite sera la directrice.* Le reste de la construction s'achèvera facilement.

N. B. Nous engageons le lecteur à appliquer la méthode exposée (§ 144 et 173) pour l'ellipse et l'hyperbole.

THÉORÈME.

Si d'un point intérieur ou *extérieur à la parabole on trace un diamètre et une parallèle à la corde conjuguée ; le rectangle des deux parties de la parallèle, vaut celui du paramètre de ce diamètre et de la distance du point à la courbe, mais comptée sur ce diamètre ;* c'est-à-dire (fig. 149)

$$IA.\ IA' = 2p'.\ IG.$$

En effet, nous avons

$$y^2 = 2p'x,$$

d'où

$$GQ^2 = 2p'.\ OQ \quad \text{et} \quad AR^2 = 2p'.\ OR;$$

et par suite

$$GQ^2 - AR^2 = 2p'(OQ - OR) = 2p'.\ RQ = 2p'.\ IG \qquad (1).$$

Or

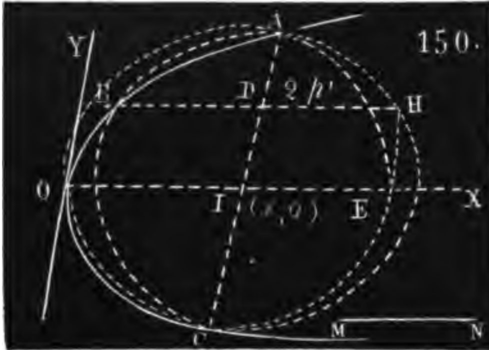
$$GQ^2 - AR^2 = (GQ + AR)(GQ - AR) = IA.IA' \qquad (2),$$

donc, (1) et (2) donnent

$$IA.IA' = 2p'.IG. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

PROBLÈME.

Construire la parabole connaissant la direction de l'axe et trois points (fig. 150).



Soient A, B, C les trois points et MN la direction de l'axe; tirons la corde AC et le diamètre DB, ainsi que celui IX de cette corde; nous aurons, $2p'$ étant le paramètre inconnu de IX,

$$AD.DC = BD.2p';$$

donc DH, segment déterminé sur la corde BD par la circonférence des trois points A, B, C, sera $2p'$.

Si maintenant nous désignons par x la distance du point I à l'origine du diamètre IX; nous aurons, AI étant l'ordonnée,

$$AI^2 = 2p'.x;$$

c'est-à-dire que x sera le segment IO déterminé sur le diamètre IX par la circonférence des points A, C et E; E étant donné par IE = DH = $2p'$.

N. B. Le lecteur achèvera facilement la construction.

Exercices.

203. Voici quelques problèmes à résoudre.

1° Construire la parabole connaissant deux tangentes et la directrice.

2° Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés sont tangents à une parabole et forment avec l'axe deux angles dont la somme est constante?

7° D'un point fixe P on mène à une parabole donnée, une sécante quelconque PAB; quel est le lieu du point M de cette sécante pour $PM^2 = PA.PB$?

5° On mène une tangente quelconque à une hyperbole, on joint les points où elle coupe ses asymptotes à deux points fixes; quel est le lieu de l'intersection de ces deux droites?

6° Étant donné un arc de parabole, décrire la courbe.

§ X.

Étude des propriétés des courbes du second ordre

QUADRATURES ET CUBATURES.

XLVIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Théorème. L'aire de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les demi-axes de l'ellipse. — Problème. Déterminer le volume donné par l'ellipse tournant autour d'un de ses axes. Quand ce volume est-il maximum? — Théorème. La surface d'un segment hyperbolique a pour mesure le log. (La base dépend de la puissance de l'hyperbole) de l'abscisse du point extrême de l'arc de la portion de courbe considérée. — Théorème. L'aire d'un segment de parabole vaut les deux tiers du parallélogramme construit sur les coordonnées de l'extrémité de l'arc parabolique et avec leur inclinaison mutuelle. — Problème. Le volume engendré par un segment parabolique, tournant autour de son axe, vaut la moitié du cylindre de même base & de même hauteur. — Exercices.

De l'ellipse.

204. Les théorèmes et problèmes qui vont suivre se rapportent à l'évaluation de segments Elliptique, Hyperbolique et Parabolique et des volumes engendrés par la révolution de ces segments autour de leur ave.

THÉORÈME.

L'aire de l'ellipse est égale à celle d'un cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre les demi-axes de l'ellipse (fig. 151).

Nous avons

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

pour les équations de l'ellipse et de la circonférence décrite sur son axe transverse comme diamètre; donc

$$y : Y :: b : a,$$

pour les ordonnées de ces lignes et correspondant à une même abscisse.



Ceci posé, concevons un polygone inscrit dans le demi-cercle décrit sur BB' comme diamètre; les projetantes des sommets sur l'axe $2a$ déterminent des trapèzes rectilignes T et t : appartenant les premiers à la surface circulaire et les seconds à celle de l'ellipse, et pour lesquels on a

$$t = \frac{y' + y''}{2}(x' - x''), \qquad T = \frac{Y' + Y''}{2}(x' - x'');$$

d'où

$$t : T :: y' + y'' : Y' + Y'' \qquad (1).$$

Or

$$y' : Y' :: y'' : Y'' :: b : a,$$

donc

$$y' + y'' : Y' + Y'' :: b : a;$$

et par suite, pour (1),

$$t : T :: b : a.$$

On aurait de même

$$t' : T' :: b : a, \quad t'' : T'' :: b : a, \quad t''' : T''' :: b : a,$$

et

$$t : T :: t' : T' :: t'' : T'' :: t''' : T''' :: \ldots :: b : a,$$

d'où

$$t + t' + t'' + t''' + \ldots : T + T' + T'' + T''' + \ldots :: b : a.$$

Mais, à mesure que les sommets (x', y'), (x'', y'')... d'une part et (x', Y'), (x'', Y'') ... d'autre part, se rapprochent sur les courbes où ils sont situés, les surfaces $t + t' + t'' + \ldots$ et $T + T' + T'' + \ldots$ tendent à coïncider avec la demi-ellipse et le demi-cercle; donc, A LA LIMITE,

$$E : \pi a^2 :: b : a,$$

et par suite

$$E = \pi ab = \pi(\sqrt{ab})^2 \qquad (SE);$$

c'est-à-dire que *l'aire de l'ellipse est égale à celle d'un cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre les demi-axes de l'ellipse.*

COROLLAIRES I. La relation

$$ab = a'b' \sin. (\alpha' - \alpha),$$

substituée dans (SE), donne

$$E = \pi a'b' \sin. (\alpha' - \alpha);$$

ou *la surface de l'ellipse en fonction de deux diamètres conjugués et de leur angle.*

II. Si on considère un segment elliptique compris entre une portion de courbe, un diamètre et les cordes conjuguées de ce dernier, menées par les extrémités de l'arc elliptique, on trouvera facilement

$$S = S' \frac{b'}{a'} \sin. (\alpha' - \alpha).$$

S' étant le segment circulaire du cercle décrit sur $2a'$ comme diamètre, compris entre l'arc, le diamètre $2a'$ et les perpendiculaires à ce dernier par les pieds des ordonnées obliques des extrémités de l'arc elliptique.

SCOLIE. Si le diamètre $2a'$ est l'axe transverse $2a$, $\alpha' - \alpha = 90°$ donnera

$$S = S'. \frac{b}{a}.$$

PROBLÈME.

Déterminer le volume engendré par l'ellipse tournant autour d'un de ses axes (fig. 152).



Supposons que l'ellipse tourne autour de son axe transverse $2a$, et prenons cette droite et sa conjuguée centrale pour axes coordonnés, nous avons

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

pour les équations de cette courbe et de la ciconférence décrite sur $2a$ comme diamètre; d'où

$$y^2 : Y^2 :: b^2 : a^2$$

pour les ordonnées de ces lignes et correspondant à une même abscisse.

Ceci posé, considérons les trapèzes rectangles ayant pour sommets (x', o), (x', y'), (x'', y'') et (x'', o) d'une part et (x', o), (x', Y'), (x'', Y'') et (x'', o) d'autre part; et

désignons par v et V les troncs de cônes donnés par leur révolution autour de la droite $y = 0$; nous aurons

$$v = \tfrac{1}{3}\pi(x' - x'')[y'^2 + y''^2 + y'y''],$$
$$V = \tfrac{1}{3}\pi(x' - x'')[Y'^2 + Y''^2 + Y'Y''];$$

d'où

$$v : V :: y'^2 + y''^2 + y'y'' : Y'^2 + Y''^2 + Y'Y''.$$

Or, de

$$y'^2 : Y'^2 :: y''^2 : Y''^2 :: b^2 : a^2,$$

on déduit

$$y'y'' : Y'Y'' :: b^2 : a^2;$$

donc

$$y'^2 : Y'^2 :: y''^2 : Y''^2 :: y'y'' : Y'Y'' :: b^2 : a^2,$$

et par suite

$$y'^2 + y''^2 + y'y'' : Y'^2 + Y''^2 + Y'Y'' :: b^2 : a^2;$$

d'où

$$v : V :: b^2 : a^2.$$

On aurait de même, pour une suite d'autres points pris sur ces courbes,

$$v' : V' :: b^2 : a^2, \quad v'' : V'' :: b^2 : a^2, \quad v''' : V''' :: b^2 : a^2,$$

donc

$$v : V :: v' : V' :: v'' : V'' :: v''' : V''' :: \ldots :: b^2 : a^2;$$

et par suite

$$v + v' + v'' + v''' + \ldots : V + V' + V'' + V''' + \ldots :: b^2 : a^2,$$

et, en passant à la *limite*,

$$\text{VOLUME ELLIPSOÏDE : VOLUME SPHÈRE DE RAYON } a :: b^2 : a^2;$$

donc

$$\textit{volume ellipsoïde} = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \frac{b^2}{a^2} = \tfrac{4}{3}\pi ab^2.$$

Ainsi *le volume de l'ellipsoïde est celui de la sphère ayant pour rayon le second des deux moyens proportionnels insérés entre* a *et* b.

En effet, de

$$\div\!\div\, a : x : y : b,$$

on déduit

$$x^2 = ay \quad \text{et} \quad y^2 = bx;$$

d'où, en éliminant x,

$$y^3 = ab^2;$$

et par suite

$$\textit{volume ellipsoïde} = \tfrac{4}{3}\pi y^3.$$

COROLLAIRE. Si l'ellipse tournait autour de son petit axe, le volume serait

$$\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Ainsi *l'ellipse doit pivoter autour de son moindre axe pour que le volume engendré soit maximum.*

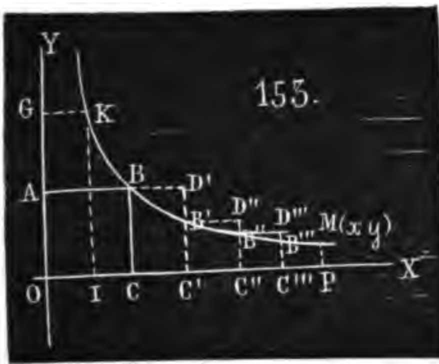
SCOLIE. L'ellipsoïde de révolution vaut les deux tiers du cylindre qui lui est circonscrit.

REMARQUE. La terre est un ellipsoïde applatie vers les pôles et tournant autour du petit axe, donc son volume est *maximum* pour son ellipse génératrice. Ainsi un cataclisme résulterait de l'axe équatorial devenant celui des pôles, car le volume terrestre devant diminuer, cela ne pourrait avoir lieu qu'en perdant dans l'espace une partie de son volume actuel.

De l'hyperbole.

THÉORÈME.

La surface d'un segment hyperbolique a pour mesure le log. (LA BASE DÉPEND DE LA PUISSANCE DE L'HYPERBOLE) *de l'abscisse du point extrême de l'arc de la portion de courbe considérée.*



On désigne communément sous le nom de SEGMENT HYPERBOLIQUE, *la partie du plan de cette courbe comprise entre une portion de son arc, les parallèles menées par ses extrémités à une asymptote, et l'autre asymptote.*

Considérons d'abord l'hyperbole équilatère ayant L'UNITÉ pour puissance, son équation sera

$$xy = 1;$$

et cherchons d'abord le segment $CPM\widehat{B}$ (fig. 153), dont *l'unité* et x sont les abscisses des points extrêmes de l'arc BM.

A cet effet, divisons CP en parties telles que les points de division donnent, pour leurs abscisses, une progression géométrique

$$1,\ x',\ x'^2,\ x'^3\ \ldots\ldots\ x'^n \text{ ou } x;$$

les ordonnées correspondantes seront

$$1,\ \frac{1}{x'},\ \frac{1}{x'^2},\ \frac{1}{x'^3},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{x'^n} \text{ ou } x.$$

Maintenant si par les points de division C, C', C'', C''',... nous élevons des per-

pendiculaires à l'asymptote OX et que chacune soit limitée à la parallèle à OX menée par l'extrémité de l'ordonnée précédente; nous aurons des rectangles

$$BCC'D', \quad B'C'C''D'', \quad B''C''C'''D''' \ldots$$

dont chacun aura pour mesure

$$x' - 1;$$

et dont la somme aura évidemment pour limite

$$\textit{segment } CP\widehat{MB}.$$

Or, si on ajoute successivement les *deux* premiers, les *trois* premiers, ... rectangles, en remarquant que le premier *ou* celui compris entre BC et lui-même est zéro, on obtient pour

les abscisses	1,	x',	x'^2,	x'^3,	.....	x'^n *ou* x
aires rectangulaires	0,	$x'-1$,	$2(x'-1)$,	$3(x'-1)$,	.....	$n(x'-1)$.

Donc, en posant $n = \infty$, la continuité sera établie d'une part de

$$1 \text{ à } x,$$

et d'autre part de

$$0 \text{ à } n(x'-1) \quad \text{ou} \quad n(\sqrt[n]{x}-1);$$

donc, l'*aire hyperbolique est le logarithme de l'abscisse extrême.*

Cherchons maintenant la *base* de ce système de logarithmes; or, en désignant par e cette base, pour laquelle $n = \infty$, il vient

$$e^{n(x'-1)} = x'^n$$

ou

$$e^{n(\sqrt[n]{x}-1)} = x;$$

et en posant l'hypothèse particulière $x = e$, on obtient

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

d'où, après développement,

$$e = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots,$$

puis, réduisant et adoptant une forme faisant disparaître la forme $\frac{\infty}{\infty}$,

$$e = 2 + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{[2]} + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{[3]} + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{[4]} + \ldots$$

c'est-à-dire

$$e = 2 + \frac{1}{[2]} + \frac{1}{[3]} + \frac{1}{[4]} + \frac{1}{[5]} + \dots$$

pour $n = \infty$.

Donc, dans le cas de l'hyperbole équilatère, dont l'unité est la puissance, LA BASE EST CELLE DE NEPER (*logarithmes dits* NATURELS) et on pose

$$aire\ \text{PC}\widehat{\text{BM}} = \log'.\ x.$$

La formule précédente détermine également le segment $\text{CI}\widehat{\text{KB}}$ pour lequel l'abscisse extrême est moindre que l'unité : en effet, on a

$$aire\ \text{CI}\widehat{\text{KB}} = \text{BCOA} + \text{AG}\widehat{\text{KB}} - \text{IOGK} = \text{AG}\widehat{\text{KB}},$$

car les rectangles BCOA et IOGK sont équivalents.

Mais l'aire $\text{AG}\widehat{\text{KB}}$ n'est autre que le segment hyperbolique compris entre les ordonnées

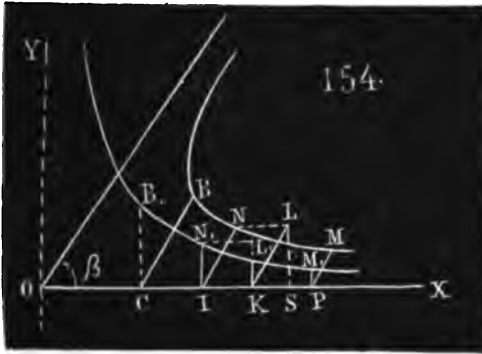
$$\text{OA} = 1 \quad \text{et} \quad \text{OG} = y,$$

donc

$$\text{CI}\widehat{\text{KB}} = \text{AG}\widehat{\text{KB}} = \log'.\ y = \log'.\ \frac{1}{x} = -\log'.\ x;$$

c'est-à-dire que *le logarithme népérien de l'abscisse doit être pris négativement.*

N. B. La base Népérienne étant supérieure à l'unité, cette dernière surface est et devait être positive.



Considérons maintenant l'hyperbole quelconque (fig. 154).

$$xy = m^2,$$

et concevons en même temps l'hyperbole équilatère ayant l'unité pour puissance avec une asymptote et le centre communs.

Or, le rectangle $\text{IN}_1\text{L}_1\text{K}$ et le parallélogramme INLK ayant même base IK, ont pour rapport

$$\text{IN}_1 : \text{LS} :: \text{IN}_1 : \text{LK} \sin.\ \beta :: \text{IN}_1 : \text{NI} \sin.\ \beta;$$

mais

$$\text{IN}_1 = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \text{IN} = \frac{m^2}{x},$$

donc

$$\text{IN}_1\text{L}_1\text{K} : \text{INLK} :: \frac{1}{x} : \frac{m^2}{x} \sin.\ \beta :: 1 : m^2 \sin.\ \beta;$$

et, à la limite des sommes de ces rectangles et de ces parallélogrammes,

$$\mathrm{PC}\widehat{\mathrm{B_1M_1}} : \mathrm{PC}\widehat{\mathrm{BM}} :: 1 : m^2 \sin.\beta,$$

ou

$$\log'.x : \mathrm{PC}\widehat{\mathrm{BM}} :: 1 : m^2 \sin.\beta;$$

donc

$$\mathrm{PC}\widehat{\mathrm{BM}} = [m^2 \sin.\beta] \log'.x.$$

Ainsi,

$$\mathrm{PC}\widehat{\mathrm{BM}} = \log.x$$

correspond au système de log. ayant pour module

$$m^2 \sin.\beta,$$

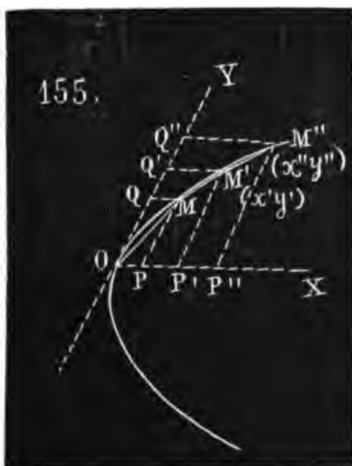
en partant du système naturel; et cette basse B est donnée par

$$\mathrm{Log'\,B} = \frac{1}{m^2 \sin.\mathrm{B}}.$$

De la Parabole.

THÉORÈME.

L'aire d'un segment de parabole vaut les deux tiers du parallélogramme construit sur les coordonnées de l'extrémité de l'arc parabolique et avec leur inclinaison mutuelle (fig. 155).



Soit le segment de la parabole OM''P'' compris entre la courbe, un diamètre OX et la demi-corde conjuguée M''P'' de ce dernier.

Inscrivons un polygone OMM'M'' dans l'arc $\widehat{\mathrm{OM''}}$ et traçons les ordonnées MP, M'P', M''P'' et les abscisses MQ, M'Q', M''Q'' de ces sommets; puis comparons un trapèze (T) interne M'P'P''M'' à celui (t) externe M'Q'Q''M'', nous avons

$$2\mathrm{T}=(y''+y')(x''-x')\mathrm{s}.\theta,\quad 2t=(x''+x')(y''-y')\mathrm{s}.\theta;$$

et, pour leur rapport,

$$\frac{\mathrm{T}}{t} = \frac{x''-x'}{y''-y'}.\frac{y''+y'}{x''+x'} \quad (1).$$

Or, la situation des points (x', y') et (x'', y'') donne

$$y''^2 = 2px'' \quad \text{et} \quad y'^2 = 2px',$$

d'où

$$(y'' + y')\ (y'' - y') = 2p\ (x'' - x'),$$

et par suite

$$\frac{x'' - x'}{y'' - y'} = \frac{y'' + y'}{2p};$$

donc, en substituant dans (1),

$$\frac{\text{T}}{t} = \frac{y'' + y'}{2p} \cdot \frac{y'' + y'}{x'' + x'};$$

d'où, à la limite, en posant $x'' = x'$ et $y'' = y'$,

$$\textit{limite}\ \frac{\text{T}}{t} = \frac{y'^2}{px'} = \frac{2px'}{px'} = 2;$$

c'est-à-dire que

$$\widehat{\text{OM}''\text{P}''} : \widehat{\text{OM}''\text{Q}''} :: 2 : 1,$$

et

$$\widehat{\text{OM}''\text{P}''} + \widehat{\text{OM}''\text{Q}''} \quad \text{ou} \quad \text{OP}''\text{M}''\text{Q}'' : \widehat{\text{OM}''\text{P}''} :: 3 : 2;$$

donc

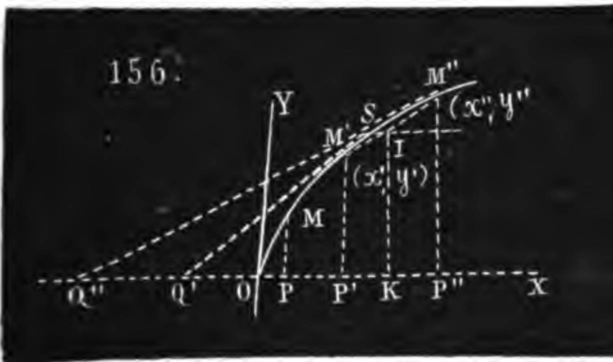
$$\widehat{\text{OM}''\text{P}''} = \tfrac{2}{3}\,\text{OP}''\text{M}''\text{Q}'' = \tfrac{2}{3}\,xy \sin.\theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SCOLIE. Si le diamètre OX était l'axe de symétrie, on aurait

$$\widehat{\text{OM}''\text{P}''} = \tfrac{2}{3}\,xy.$$

PROBLÈME.

Le volume engendré par un segment parabolique, tournant autour de son axe, vaut la moitié du cylindre de même base et de même hauteur (fig. 156).



En effet, inscrivons un polygone OMM'M'' dans un arc parabolque OM'' et menons les ordonnées et les tangentes aux sommets M, M', M'', M''', nous formons ainsi une série de trapèzes tels que P'M'M''P'' intérieurs et

une suite de triangles extérieurs SQ″Q′,..... Ceci posé, appelons V et v les volumes engendrés par ces figures tournant autour de OX, nous aurons

$$V = \frac{1}{3}\pi(x''-x')(y''^2+y'^2+y'y''),$$
$$v = \frac{1}{3}\pi\, Q'Q''.IK^2 = \frac{1}{3}\pi(x''-x').\left(\frac{y'+y''}{2}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{V}{v} = \frac{4(y''^2+y'^2+y'y'')}{(y'+y'')^2};$$

et par suite pour la limite de ce rapport, en posant $x''=x'$ et $y''=y'$,

$$limite\ \frac{V}{v} = 3.$$

Ainsi, on a

$$volume\ \widehat{OM''P''} : volume\ \widehat{OM''Q''} :: 3 : 1,$$

donc

$$volume\ \widehat{OM''P''} + volume\ \widehat{OM''Q''} : volume\ \widehat{OM''P''} :: 4 : 3;$$

et par suite, à cause de

$$vol.\ \widehat{OM''P''} + \text{vol.}\ \widehat{OM''Q''}. = vol.\ Q''P''M'' = \frac{2}{3}\pi y''^2x'',$$
$$\frac{2}{3}\pi y''^2x : vol.\ \widehat{OM''P''} :: 4 : 3;$$

d'où

$$vol.\ \widehat{OM''P''} = \frac{1}{2}\pi y''^2.x''. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SCOLIE. Le volume précédent, désigné sous le nom de *paraboloïde de révolution*, vaut donc la sphère ayant pour diamètre l'ordonnée, lorsque cette dernière vaut trois fois son abscisse.

N. B. Supposons une lumière placée au foyer F de la parabole (fig. 139) génératrice du paraboloïde de révolution, tous les rayons lumineux réfléchis suivant des parallèles à l'axe donneront un faisceau lumineux se propageant sans dispersion et éclairant à une grande distance.

Tel est le motif de la forme parabolique donnée aux réflecteurs des réverbères, des phares, des télescopes et même du porte-voix et des cornets acoustiques.

Exercices.

1° On a une série d'ellipses ayant même surface et leurs axes dirigés suivant les mêmes droites; quel est le lieu des sommets du rectangle maximum inscrit dans chaque ellipse?

2° De toutes les ellipses inscrites dans un même parallélogramme, quelle est la plus grande?

3° De toutes les ellipses circonscrites à un même parallélogramme, quel est la plus petite?

4° Quelle est l'aire de l'ellipse $Ay^2+2Bxy+Cx^2=1$?

5° Quel est le lieu du sommet d'un angle circonscrit à la parabole, et tel que le triangle mixtiligne formé par les côtés de l'angle et l'arc de la parabole ait une aire constante?

§ XI.

Des sections planes du cône & du cylindre.

XLVIIIe & XLIXe LEÇON.

SOMMAIRE.

Du cône droit & de ses sections planes. — Théorème I. Les sections planes du cône sont des courbes du second ordre. — Théorème II. Toute courbe du second ordre peut se placer sur un cône droit ayant β pour angle générateur. — Cylindre droit & sa section plane. — Théorème. La section plane du cylindre droit appartient au genre elliptique. — 2e méthode de détermination pour les sections du cône droit : I. Ellipse ; II. Parabole & III. Hyperbole. — Du cône oblique & de ses sections planes. — Section anti-parallèle ou sous-contraire du cône. — Théorème. Tout cône oblique donne pour section plane les trois courbes du second ordre.

Du cône droit & de ses sections planes.

208. On désigne sous le nom de *cône droit* la surface engendrée par une droite indéfinie tournant autour d'un de ses points, tout en faisant un angle constant β avec une droite fixe passant par ce point. La droite mobile est *la génératrice* du cône, le point et la droite fixe en sont *le sommet* et *l'axe*.

N. B. La génération du cône droit implique évidemment que toute section perpendiculaire à l'axe est *un cercle ;* et que cette surface se transforme en *un cylindre*, si le sommet se transporte à *l'infini ;* c'est-à-dire *si la génératrice est parallèle à l'axe.*

THÉORÈME I.

Les sections planes du cône droit sont des courbes du second ordre (fig. 157).

Soit AMK une section plane d'un cône droit et AX la trace de ce plan, sur son perpendiculaire ASV passant par l'axe VV′ du cône. Ce plan ASV se nomme *section principale* du cône par rapport à celle AMX.

Ceci posé, rapportons la courbe à la droite AX pour axe des X et à sa perpendiculaire au point A pour axe des ordonnées; nous aurons

$$AP = x \quad \text{et} \quad PM = y,$$

et le plan sécant sera déterminé par $SA = d$ et par $SAX = \alpha$.

Maintenant le plan EMF mené par MP et EPF perpendiculaire à VV′, détermine une section circulaire EMF donnant

$$y^2 = EP.PF \qquad (1).$$

Or, le triangle AEP donne

$$\sin. AEP \ \textit{ou} \ \cos.\beta : \sin. EAP \ \textit{ou} \ \sin.\alpha :: AP \ \textit{ou} \ x : EP = \frac{x \sin.\alpha}{\cos.\beta};$$

mais de PH parallèle à BS, on déduit

$$PF = HB = AB - AH = 2d \sin.\beta - AH,$$

puis, traçant AI parallèle à PH, on a, dans le triangle APH,

$$\sin.AHP \ \textit{ou} \ \sin.B \ \textit{ou} \ \cos.\beta : \sin.APH \ \textit{ou} \ \sin.IAX' \ \textit{ou} \ \sin.(\alpha+2\beta) :: AP \ \textit{ou} \ x : AH,$$

d'où

$$AH = \frac{x \sin.(\alpha+2\beta)}{\cos.\beta};$$

et par suite

$$PF = 2d \sin.\beta - \frac{x \sin.(\alpha+2\beta)}{\cos.\beta}.$$

Donc (1) devient

$$y^2 = \frac{2d \sin.\alpha \sin.\beta}{\cos.\beta}.x - \frac{\sin.\alpha \sin.(\alpha+2\beta)}{\cos.^2\beta}x^2 \qquad (\psi).$$

DISCUSSION. Cette équation (ψ) peut représenter analytiquement et géométriquement les trois courbes du second degré. En effet,

$$\alpha + 2\beta < 180°$$

détermine *une ellipse* pour (ψ) ; et dans le cône, la section AMB, coupant toutes les génératrices de cette surface sur une seule *nappe*, *ne peut être que fermée;* donc, c'est une courbe *elliptique*.

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

donne *une parabole*, car (ψ) devient

$$y^2 = \frac{2d \sin.\ \alpha \sin.\ \beta}{\cos.\ \beta}\, x.$$

Du reste, c'est une conséquence du parallélisme du plan AMB et de la génératrice SB.

Enfin pour

$$\alpha + 2\beta > 180^\circ :$$

(ψ) représente bien *une hyperbole*, indiquée par ce fait synthétique de l'intersection des deux nappes du cône par le plan sécant.

THÉORÈME II.

Toute courbe du second ordre peut se placer sur un cône droit, ayant β pour angle générateur.

En effet, considérons simultanément

$$\varphi)\quad y^2 = 2px + qx^2 \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{2d \sin.\alpha \sin.\beta}{\cos.\ \beta}\, x - \frac{\sin.\ \alpha \sin.\ (\alpha + 2\beta)}{\cos.^2 \beta}\, x^2 \quad (\psi.$$

Il est évident que cela revient à établir que d et α sont déterminés par

$$1)\quad \frac{d \sin.\ \alpha \sin.\ \beta}{\cos.\ \beta} = p \quad \text{et} \quad \frac{\sin.\ \alpha \sin.\ (\alpha + 2\beta)}{\cos.^2 \beta} = -q \quad (2.$$

Or (2) devient, en transformant le produit des *sinus* en différence de *cosinus*,

$$\cos.\ (2\alpha + 2\beta) = 2\,(1 + q) \cos.^2 \beta - 1\,;$$

et α existera si l'on a

$$2\,(1 + q) \cos.^2 \beta < 1 \quad \text{ou} \quad (1 + q) \cos.^2 \beta < 1.$$

DISCUSSION. I. ELLIPSE : Nous avons

$$q = -\frac{b^2}{a^2};$$

donc, on doit avoir

$$\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos.^2 \beta < 1 \quad \text{ou} \quad \frac{c^2}{a^2} \cos.^2 \beta < 1 :$$

inégalité exacte, car on a en même temps

$$\frac{c}{a} < 1 \quad \text{et} \quad \cos.^2 \beta < 1.$$

N. B. L'hypothèse $d = 0$ caractériserait *un point qui serait le sommet du cône.*

II. PARABOLE : Alors

$$q = 0;$$

donc évidemment

$$\cos.^2 \beta < 1.$$

N. B. $d = 0$ réduisant (ψ) à

$$y^2 = 0,$$

on obtiendrait *deux droites confondues avec la génératrice* SA du cône.

III. HYPERBOLE. Dans ce cas

$$q = \frac{b^2}{a^2};$$

ainsi il faut que l'on ait

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cos.^2 \beta < 1 \quad \text{ou} \quad \cos. \beta < \frac{a}{c}.$$

Or, θ désignant l'angle des asymptotes avec la partie de droite de l'axe transverse, de

$$\cos. \theta = \frac{a}{c},$$

on déduit

$$\cos. \beta < \cos. \theta \quad \text{ou} \quad \beta > \theta;$$

c'est-à-dire qu'*on ne pourra couper un cône suivant une hyperbole donnée que si l'angle total* 2β *du cône, est supérieur à celui formé par les asymptotes et comprenant la courbe.*

N. B. $2\beta = 2\theta$ réduit la courbe à ses asymptotes.

Du cylindre droit & de sa section plane.

THÉORÈME.

La section plane du cylindre droit appartient au genre elliptique.

A cet effet, remarquons que la section circulaire faite par le point A et *perpendiculairement* à l'axe du cône, donne

$$r = d \sin. \beta;$$

donc (ψ) devient

$$y^2 = 2r \frac{\sin. \alpha}{\cos. \beta} x - \frac{\sin. \alpha \sin. (\alpha + x)}{\cos.^2 \beta} . x^2 \qquad (\psi').$$

Maintenant comme le cône se transforme en cylindre en admettant

$$\beta = 0,$$

on obtient, pour (ψ'),

$$y^2 = 2r \sin. \alpha. x - \sin.^2 \alpha. x^2;$$

et, en posant

$$r \sin. \alpha = b < r,$$

il vient

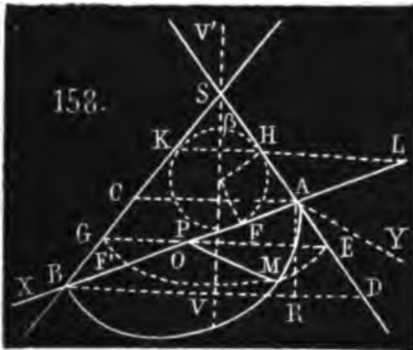
$$r^2y^2 + b^2x^2 - 2br^2x = 0 \qquad (\psi'');$$

c'est-à-dire *une ellipse* ayant pour *axes de symétrie*.

$$2r \quad \text{et} \quad 2b.$$

N. B. Le lecteur est prié de chercher directement (ψ'').

Méthode des sections spéciales du cône droit.



ELLIPSE. Une telle courbe ne peut résulter d'une section conique que pour un plan coupant les génératrices opposées sur une même nappe : supposons cette condition remplie et soit AMB la courbe dont AB est la trace du plan sur la section principale du cône; puis posons (fig. 158)

$$AB = 2a, \ AC = 2g \quad \text{et} \quad BD = 2f.$$

Des constructions analogues à celles de la première méthode donnent

$$y^2 = EP.PG \qquad (1).$$

Ceci posé, des triangles semblables AEP et ADB d'une part, BPG et BAC d'autre part, on déduit

$$\left.\begin{array}{l} \text{AB ou } 2a : \text{AP ou } x :: \text{BD ou } 2f : \text{EP}, \\ \text{AB ou } 2a : \text{BP ou } 2a - x :: \text{AC ou } 2g :: \text{PG}, \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \text{EP} = \dfrac{fx}{a} \\ \text{PG} = \dfrac{g(2a-x)}{a}; \end{array}\right.$$

et par suite, pour (1),

$$y^2 = \frac{fg}{a^2}(2ax - x^2) \qquad (\varphi').$$

Ainsi (φ') *est une ellipse ayant pour axes* 2a *et une moyenne proportionnelle entre* AC *et* BD.

REMARQUES I. La projection de AB sur BD est $BR = f + g$; donc

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2BD.BR \quad \text{d'où} \quad AD = 2\sqrt{a^2 - fg} = 2c;$$

c'est-à-dire que AD est *l'excentricité* de l'ellipse.

II. *La circonférence inscrite au triangle* SAB *a pour point de contact sur* AB, *un foyer* F.

En effet, prenant $BF' = AF$, on a

$$FF' = BF - AF = BK - AH = BK - CK = BC = AD = 2c. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. Le second foyer serait encore déterminé par le point de contact sur AB de la circonférence ex-inscrite au même triangle et tangent à AB.

III. *Le pied* L *sur* AB *de la directrice de droite, est situé sur la perpendiculaire menée du point de contact* H *à* VV'.

En effet, 0 étant le centre de l'ellipse, les triangles ALH et ABD donnent

$$AL \text{ ou } 0L - a : AB \text{ ou } 2a :: AH \text{ ou } AF \text{ ou } a - c : AD \text{ ou } 2c;$$

donc, *componendo*, après la division des conséquents par 2,

$$0L : a :: a : c \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

IV. *Les plans parallèles au plan sécant déterminent des ellipses semblables.*

Car les triangles ABD et ABC restent semblables et le rapport

$$\frac{\sqrt{fg}}{a}$$

est constant.

V. *Une ellipse peut toujours être placée sur un cône droit quelconque.*

Dans le triangle ABD, on connaît

$$AB = 2a, \quad AD = 2c \quad \text{et} \quad ADB = 90^\circ - \beta;$$

et de

$$2a > 2c,$$

on déduit que ce triangle n'est susceptible que d'*une seule solution*.

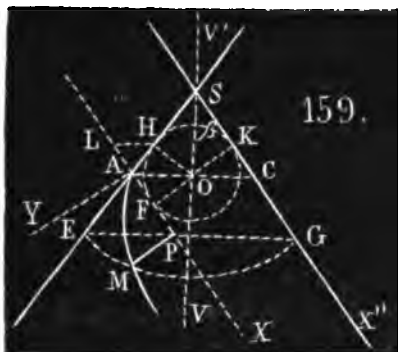
Donc, on tracera ce triangle ABD et la *médiatrice* VV' normale au troisième côté BD, sera l'axe du cône dont DAS sera la génératrice; tandis que AB sera la trace du plan sécant demandé sur la section principale ASB.

2e CAS. PARABOLE. La trace du plan sécant sur la section principale du cône devra être une droite AX parallèle à une génératrice SC de ce cône, et comme précédemment (fig. 159)

$$y^2 = EP.PG \qquad (1');$$

mais, en posant $SA = d$, les triangles AEP et SAC donnent

$$SC \text{ ou } d : AP \text{ ou } x :: AC \text{ ou } 2g : EP;$$



donc (1') se transforme en

$$y^2 = \frac{4g^2}{d} x \quad (\varphi''),$$

puisque PG = AC = $2g$.

Donc *la section* (φ'') *est une parabole*, ayant $\frac{4g^2}{d}$ pour paramètre.

REMARQUES I. *Le foyer* F *est le point de contact sur* AX *du cercle tangent aux droites* SA, SC *et* AX.

En effet, les triangles rectangles semblables AOF, SAO donnent

$$\text{SA} \quad \text{ou} \quad d : \text{AO} \quad \text{ou} \quad g :: \text{AO} \quad \text{ou} \quad g : \text{AF},$$

donc

$$\text{AF} = \frac{g^2}{d} \ldots. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

II. *Le pied* L *de la directrice sur* AX', *est sur la perpendiculaire abaissée du point* H *sur l'axe* VV' *du cône.*

Car le triangle isocèle ALH donne

$$\text{AL} = \text{AH} = \text{AF}.$$

III. *Toutes les paraboles sont semblables.*

Les plans parallèles au précédent ne donnent qu'une série de triangles SAC; donc, de l'absence de condition de similitude, on doit conclure que *toutes ces courbes sont semblables.*

IV. *Une parabole peut toujours être placée sur un cône donné.*

En effet, le triangle OAF est déterminé par le côté

$$\text{AF} = \tfrac{1}{2} p \quad \text{et} \quad \text{OAF} = 90^\circ - \beta;$$

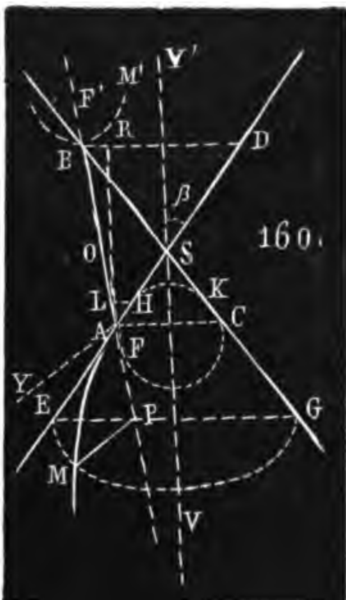
donc, après sa construction, on tracera OS perpendiculaire à l'hypothénuse et AS formant avec AX, un angle dont AO sera la bissectrice : OS et AS seront respectivement l'axe et la génératrice du cône; tandis que AF sera la trace, sur la section principale du cône, du plan décrivant la parabole donnée.

3e CAS. HYPERBOLE. Ici le plan sécant coupera les génératrices opposées de la section principale sur les deux nappes du cône; et, en conservant les mêmes notations que dans l'ellipse, nous aurons (fig. 160)

$$y^2 = \text{EP.PG} \qquad (1'').$$

Or, les triangles semblables AEP et ABD, puis BPG et BAC donnent

$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ ou } 2a : AP \text{ ou } x :: BD \text{ ou } 2f : EP, \\ 2a : BP \text{ ou } 2a+x :: AC \text{ ou } 2g : PG; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} EP = \dfrac{fx}{a}, \\ PG = \dfrac{g(2a+x)}{a}; \end{array}\right.$$



et par suite pour (1″)

$$y^2 = \frac{fg}{a^2}(2ax + x^2) \qquad (\varphi'').$$

Donc (φ'') *est une hyperbole ayant* AB $= 2a$ *pour axe transverse, et la moyenne proportionnelle entre* AC *et* BD *pour axe imaginaire.*

REMARQUES I. La projection de AB sur BD est

$$BR = f - g,$$

donc

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2BD.\,BR,$$

ou

$$AD = 2\sqrt{a^2 + fg};$$

c'est-à-dire que AD *est l'excentricité de l'hyperbole.*

II. *La circonférence tangente aux génératrices opposées d'une même nappe du cône et à* AB, *touche cette dernière droite au foyer* F *de l'hyperbole.*

En effet, prenant BF′ = AF, il vient

$$FF' = BF + AF = BK + KC = BC = AD = 2c \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le second foyer F′ s'obtiendrait directement au moyen du cercle tangent aux droites SB, SD et AB.

III. *Le pied de la directrice du foyer* F *sur* AB, *est situé sur la perpendiculaire abaissée de* H *sur* VV′.

Car les triangles semblables ALH et ABD donnent

$$AL \text{ ou } a - OL : AB \text{ ou } 2a :: AH \text{ ou } AF \text{ ou } c - a : AD \text{ ou } 2c.$$

et par suite *componendo*, après la division des conséquents par 2,

$$OL : a :: a : c. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

IV. *Les plans parallèles au plan sécant, déterminent des hyperboles semblables.*

Cela tient à ce que les deux séries de triangles ABD et ABC semblables donnent

pour le rapport des axes

$$\frac{\sqrt{fg}}{a};$$

c'est-à-dire une constante.

V. *Une hyperbole ne peut se placer sur un cône droit que lorsque l'angle des deux génératrices opposées du cône, est supérieur à celui des asymptotes.*

En effet, du triangle ABD, nous connaissons

$$AB = 2a, \quad AD = 2c \quad \text{et} \quad ADB = 90^\circ - \beta;$$

donc, le triangle ne sera possible que lorsque l'on aura

$$AB \overset{=}{>} AR \quad \text{ou} \quad AD \sin. ADB, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2a \overset{=}{>} 2c \cos. \beta;$$

et par suite il faut avoir

$$\cos. \beta \overset{=}{<} \frac{a}{c}.$$

Or, 2θ étant l'angle des asymptotes,

$$\cos. \theta = \frac{a}{c};$$

ainsi

$$\cos. \beta \overset{=}{<} \cos. \theta \quad \text{ou} \quad 2\beta \overset{=}{>} 2\theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Maintenant le triangle existant, il n'en admettra pas moins *deux solutions;* soit ABD l'une d'elles : en traçant VV' perpendiculaire au milieu de BD, on aura l'axe du cône ayant AD pour génératrice et AB pour trace, sur ABD, de la section hyperbolique donnée.

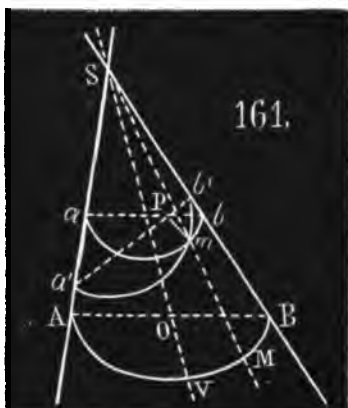
206. La méthode précédente nous a permis de construire géométriquement les foyers et les directrices des sections coniques; et, à ce seul point de vue, elle méritait de n'être point omise.

Du cône oblique & de ses sections planes.

207. Le cône oblique (fig. 161) est engendré par la révolution d'une droite SB autour d'un de ses points S et s'appuyant constamment sur une circonférence AMB, dont le plan est oblique par rapport à la droite menée de son centre O au point fixe S.

Le point fixe est *le sommet* du cône oblique, tandis que la droite le joignant au centre du cercle et ce dernier en sont respectivement *l'axe* et *la base*.

Il est évident que toute section *amb* parallèle à la base AMB sera un cercle; mais il est encore une autre série de sections circulaires non parallèles à la précédente, et nommée pour cette raison : SECTION ANTI-PARALLÈLE et quelquefois SOUS-CONTRAIRE.



En effet, soit une autre section $a'mb'$ coupant le cercle amb suivant mP ; on aura, $a'mb'$ étant supposé circulaire,

$$\left.\begin{array}{l} mP^2 = aP.Pb, \\ mP^2 = a'P.Pb', \end{array}\right\} \text{ d'où } \quad aP.Pb = a'P.Pb';$$

c'est-à-dire qu'il suffit que les quatre points a, a', b et b' appartiennent à une même circonférence. Donc, le cercle passant par les points a, a' et b détermine le point b' par sa rencontre avec SB ; et par suite la trace $a'b'$ de la sectiôn circulaire du point a' et *non parallèle* à AMB ; de plus, toute section parallèle à $a'mb'$ est également un cercle.

SCOLIE. Les droites ab et $a'b'$ appartenant à une même circonférence, et étant les diamètres de deux cercles; ceux-ci seront donc situés sur une même sphère ayant pour grand cercle celui des points a, a', b et b'.

N. B. Le cylindre oblique admet également une section circulaire *anti-parallèle.*

THÉORÈME.

Tout cône oblique donne pour section plane les trois courbes du second ordre (fig. 165).



Soit DV la trace du plan sécant sur la base AKB du cône oblique et ASB la section principale du cône; c'est-à-dire le plan qui passant par VV', est perpendiculaire au plan de la courbe OM.

Ceci posé, désignons par α, δ et γ les angles SOX, SBA et SAB; puis par MP perpendiculaire à OX, menons la section EMG parallèle à la base AKB; nous aurons

$$MP^2 = EP.PG \quad \text{ou} \quad y^2 = EP.PG \quad (1),$$

OX et sa perpendiculaire OY étant les axes coordonnés.

Or, le triangle EOP donne

$$\sin. OEP \text{ ou } \sin. \gamma : \sin. EOP \text{ ou } \sin. \alpha :: OP \text{ ou } x : EP = \frac{x \sin. \alpha}{\sin. \gamma};$$

puis traçant OC et PI respectivement parallèles à AB et SB ; il vient

$$PG = IC = OC - OI \qquad (2),$$

$$\sin SCO \text{ ou } \sin \delta : \sin ASB \text{ ou } \sin (\gamma + \delta) :: SO \text{ ou } d : OC = \frac{d \sin (\gamma + \delta)}{\sin \delta},$$

$$\sin OIP \text{ ou } \sin \delta : \sin OPI \text{ ou } \sin (\gamma + \delta - \alpha) :: OP \text{ ou } x : OI = \frac{\sin (\gamma + \delta - \alpha)}{\sin \delta} x;$$

d'où pour (1), à cause de (2),

$$y^2 = \frac{d \sin \alpha \sin (\gamma + \delta)}{\sin \gamma \sin \delta} x - \frac{\sin \alpha \sin (\gamma + \delta - \alpha)}{\sin \gamma \sin \delta} x^2 \qquad (\psi).$$

Ainsi le lieu est une courbe du second degré : *Elliptique*, *Parabolique* ou *Hyperbolique*, suivant que l'on aura

$$\gamma + \delta - \alpha > 0, \quad \gamma + \delta - \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma + \delta - \alpha < 0;$$

car on a

$$\gamma + \delta - \alpha < 180°.$$

REMARQUE. La section (ψ) sera circulaire pour

$$\sin \alpha \sin (\gamma + \delta - \alpha) = \sin \gamma \sin \delta,$$

ou, en remplaçant le produit des sinus par une différence de cosinus et simplifiant,

$$\cos (\gamma + \delta - 2\alpha) = \cos (\gamma - \delta).$$

Donc on doit avoir

$$(\gamma + \delta - 2\alpha) + (\gamma - \delta) = 2k\pi \quad \text{ou} \quad (\gamma + \delta - 2\alpha) - (\gamma - \delta) = 2k\pi;$$

c'est-à-dire

$$\gamma - \alpha = k\pi \quad \text{ou} \quad \delta - \alpha = k\pi.$$

Or, α, γ et δ sont moindres que π ; donc $k = 0$ donne

$$\alpha = \gamma \quad \text{ou} \quad \alpha = \delta.$$

Dans le premier cas la section OM est parallèle à la base AKB ; et dans le second, elle lui est *anti-parallèle* puisque le triangle SOR est semblable à SAB.

§ XII.

Des coordonnées polaires.

Le LEÇON.

SOMMAIRE.

Considérations générales sur les coordonnées d'un point. — Coordonnées polaires. — Changement d'axe Polaire & de Pôle. — Transformation de coordonnées rectilignes en coordonnées polaires. — Transformation d'un système polaire en un système rectiligne. — Applications.

Considérations générales sur les coordonnées d'un point.

208. Jusqu'ici nous avons déterminé le point au moyen de deux génératrices rectilignes *(coordonnées)* parallèles à deux droites données et convergentes. Mais on conçoit qu'il existe une infinité de modes pour caractériser un point sur un plan : c'est ainsi que

$$\rho + \rho' = constante \quad \text{et} \quad \rho - \rho' = constante$$

sont les représentations analytiques de l'ellipse et de l'hyperbole, en déterminant chaque point par ses distances à deux points fixes.

De même

$$\omega + \omega' = \textit{constante}$$

est l'équation de toute circonférence passant par deux points donnés ; ω et ω' désignant les angles formés par les droites menées des deux points à une même station de la circonférence.

Enfin

$$\rho = mx$$

spécifie *l'Ellipse*, *la Parabole* ou *l'Hyperbole* suivant que l'on a

$$m \lesseqgtr 1 ;$$

ρ et x désignant les distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice, prise comme axe fixe.

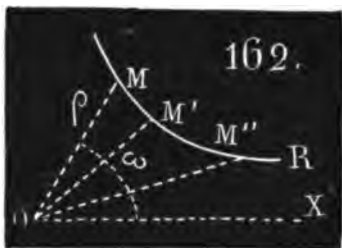
Ainsi nous venons d'avoir tour à tour DEUX CIRCONFÉRENCES A CENTRE CONSTANT ; DEUX DROITES PASSANT PAR DEUX POINTS FIXES ; ET UNE CIRCONFÉRENCE A CENTRE CONSTANT AVEC UNE DROITE PARALLÈLE A UNE DROITE DONNÉE ; c'est-à-dire que les variables ont été successivement : *les distances du point du lieu à deux points fixes; les angles ω et ω' formés par les distances précédentes avec la droite des deux points; enfin, les distances à un point et à une droite donnés.*

Donc, UN SYSTÈME DE COORDONNÉES CONSISTE, EN GÉNÉRAL, DANS LA CONSIDÉRATION SIMULTANÉE DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES DONT LES INTERSECTIONS DÉTERMINENT LA POSITION D'UN POINT ; nous disons *en général*, parce que dans l'étude des courbes on a employé avec succès comme *variables* l'arc de la courbe même, compté à partir d'un point fixe pris sur cette courbe, et l'inclinaison de la normale à l'autre extrémité de cet arc (*). Il serait donc plus complet de dire : *un système de coordonnées se forme d'un ensemble de variables susceptibles de déterminer la position d'un point.*

Coordonnées polaires.

209. Soit (fig. 162) une ligne plane MR, et concevons que chacun de ses points M, M′, M″,..... soit joint par une droite à un point fixe O *(pôle)* de

(*) Mémoire sur les développées des courbes planes par MM. Dubois-Aymé et Bigeon. Le problème des coordonnées curvilignes n'avait été résolu que dans deux cas particuliers : dans le cas où elles étaient orthogonales par *M. Lamé;* et dans celui où les courbes coordonnées étaient au nombre de deux, tracées d'ailleurs sur une surface quelconque, par l'illustre *Gauss;* mais l'année dernière *M. l'abbé Aoust*, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de Marseille, a publié une première partie d'une *Théorie des Coordonnées curvilignes quelconques* qui, au moyen d'un élément géométrique nouveau (désigné heureusement sous le nom de *Courbure inclinée* des lignes coordonnées), paraît devoir devenir un instrument précieux de transformation et de démonstration.



son plan ; il est évident que ces points seront déterminés par la connaissance des distances (ρ) OM, OM', OM'',... et des angles (ω) MOX, M'OX, M''OX,.... que ferait chacune d'elles avec une droite fixe *(axe polaire)* OX tracée par le pôle O ; car, si

$$f(\rho, \omega) = 0 \qquad (f)$$

était une relation existant entre ρ et ω pour tous les points de la ligne MR, on pourrait, en faisant varier ω *ou* ρ, déduire les valeurs correspondantes de ρ *ou* de ω et construire tous les points de cette courbe et par suite ce lieu lui-même.

Cette équation (f) est dite *celle de* MR *en coordonnées polaires ;* ρ *et* ω *se nomment le rayon vecteur et l'angle polaire.*

REMARQUES I. Lorsque (f) ne contient que des lignes trigonométriques de ω, il est évident qu'il suffira de faire passer ω de 0° à 360° pour obtenir tous les points de MR et que l'unité de ω peut être quelconque.

II. Enfin, si (f) contient ω *comme arc*, on prend pour unité d'arc celui (57° 17′ 44″, 181) dont la longueur est égale au rayon, c'est-à-dire pour unité d'angle celui qui, étant au centre, intercepte un arc égal au rayon. Alors, la variable ω n'est qu'un rapport et ne figure que comme nombre abstrait : ainsi

$$45° = \frac{\pi}{4},\ 90° = \frac{\pi}{2},\ 180° = \pi, \ldots.$$

210. D'après la conception des coordonnées polaires

$$\omega = \alpha$$

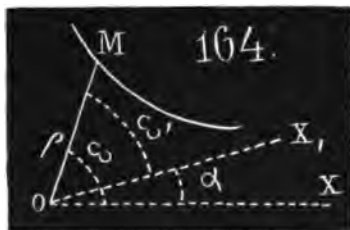
serait *une droite passant par le pôle et formant l'angle* α *avec l'axe polaire :* et

$$\rho = r$$

une circonférence ayant le pôle pour centre et r *comme rayon.*

Changement d'axe polaire & de pôle.

211. Soit (fig. 164) OX l'ancien axe polaire, OX_1 le nouveau formant avec le précédent l'angle



$$X_1OX = \alpha ;$$

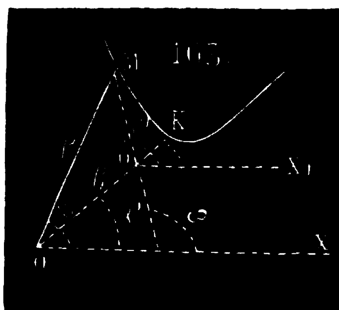
ω et ω′ les angles polaires *ancien* et *nouveau ;* nous avons évidemment

$$\omega = \omega' + \alpha,$$

et

$$f(\rho, \omega' + \alpha) = 0$$

pour la nouvelle équation polaire.



Maintenant pour passer (fig. 163) du pôle O à celui O′; l'axe polaire nouveau O′X, étant parallèle à l'ancien; nous aurons, (ρ_1, α') étant les coordonnées polaires de O,

$$\rho^2 = \rho'^2 + \rho^2 + 2\rho.\rho' \cos.(\omega' - \alpha'),$$
$$\rho' : \rho :: \sin.(\omega - \alpha') : \sin. MO'O$$

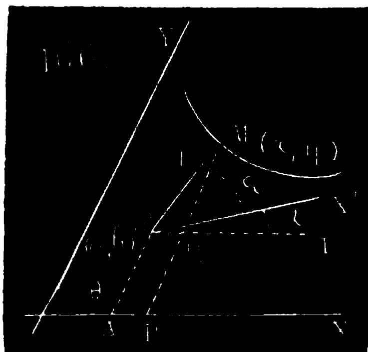
ou

$$\rho' : \rho :: \sin.(\omega - \alpha') : \sin.(\omega' - \alpha').$$

Ces relations donneraient ρ et ω en fonction de ρ' et de ω'; d'où, on déduirait

$$f(\rho', \omega') = 0.$$

Passer des coordonnées rectilignes à celles polaires.



212. Soient (fig. 166) OX et OY les axes coordonnés, (a, b) les coordonnées rectilignes du pôle O′ et

$$\omega = \alpha$$

l'*axe polaire* O′X′; nous avons

$$x = a + O'Q \quad \text{et} \quad y = b + MQ.$$

Or, le triangle MOQ donne

$$\left.\begin{array}{l} \sin. Q : \sin. M :: \rho : O'Q, \\ \sin. Q : \sin. MO'Q :: \rho : MQ, \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \sin.\theta : \sin.[\theta - (\omega + \alpha)] :: \rho : O'Q, \\ \sin.\theta : \sin.(\omega + \alpha) :: \rho : MQ; \end{array}\right.$$

et par suite

$$1) \quad x = a + \frac{\rho \sin.[\theta - (\omega + \alpha)]}{\sin.\theta}, \qquad y = b + \frac{\rho \sin.(\omega + \alpha)}{\sin.\theta} \qquad (2.$$

CAS PARTICULIERS. I. *Les axes rectilignes étant rectangulaires*

$$1') \quad x = b + \rho \cos.(\omega + \alpha), \qquad y = b + \rho \sin.(\omega + \alpha) \qquad (2'.$$

II. $\theta = 90°$ avec $\alpha = 0$ ou l'*axe polaire coïncidant avec l'axe des* X *positifs*, donnent

$$1'') \quad x = a + \rho \cos.\omega, \qquad y = b + \rho \sin.\omega \qquad (2''.$$

III. Enfin, les hypothèses précédentes continuant de subsister, si le pôle est l'origine des axes rectilignes, on a

$$1''') \quad x = \rho \cos.\omega, \qquad y = \rho \sin.\omega \qquad (2'''.$$

Passer du système polaire aux coordonnées rectilignes.

Supposons que le *pôle* soit l'origine des coordonnées (il peut toujours en être ainsi d'après le § 211), que les axes soient rectangulaires et que l'axe des X soit parallèle à l'axe polaire ; les formules (1''') et (2''') donnent

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{d'où} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

puis

$$\cos.\, \omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin.\, \omega = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \text{tg.}\, \omega = \frac{y}{x}.$$

N. B. En changeant ω en $\omega + \alpha$, on aurait les formules pour le cas où l'*axe polaire ferait un angle* α, *avec l'axe des* X.

214. Voici quelques applications sur les théories précédentes.

Applications.

PROBLÈME I.

Déterminer l'équation polaire de la droite en fonction de sa distance à l'origine, pris pour pôle, et de l'angle que cette distance fait avec l'axe des X positifs (Les axes coordonnés étant rectangulaires).

Or, nous avons trouvé § 14 (Prob. III)

$$x \cos.\, \alpha + y \sin.\, \alpha = \delta ;$$

d'où, en prenant l'origine et l'axe des X pour *pôle* et *axe polaire*,

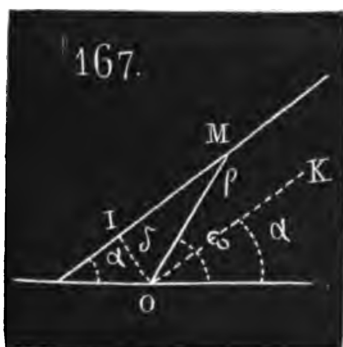
$$\rho\, (\cos.\, \omega \cos.\, \alpha + \sin.\, \omega \sin.\, \alpha) = \delta,$$

et par suite

$$\rho = \frac{\delta}{\cos.\, (\omega - \alpha)}.$$

N. B. En prenant δ pour axe polaire, on aurait, en changeant ω en $\omega' + \alpha$, $\rho \cos.\, \omega' = \delta$.

PROBLÈME II.



Trouver l'équation polaire de la droite en fonction de l'angle α qu'elle forme avec l'axe polaire et de sa distance δ au pôle (fig. 167).

Nous avons spontanément

$$\rho \sin.\, \text{IMO} = \delta ;$$

d'où, en menant OK parallèle à IM,

$$\rho \sin.\, (\omega - \alpha) = \delta.$$

PROBLÈME III.

Quelle est l'équation polaire de l'hyperbole équilatère, rapportée au centre et à l'axe transverse pour pôle et axe polaire?

Nous avons

$$x^2 - y^2 = a^2$$

pour l'équation primitive ; d'où, à cause des formules (1‴) et (2‴) du § 212,

$$\rho^2 \cos.^2 \omega - \rho^2 \sin.^2 \omega = a^2;$$

et par suite

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos. 2\,\omega}}.$$

N. B. En remplaçant l'axe polaire précédent par une asymptote, on obtient, en partant de l'équation aux asymptotes et m^2 étant la puissance de l'hyperbole,

$$\rho = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\sin. 2\,\omega}} = m\sqrt{\frac{2}{\sin. 2\,\omega}}.$$

PROBLÈME IV.

Quelle est l'équation polaire de la cissoïde?

Nous avons trouvé que cette courbe était représentée par

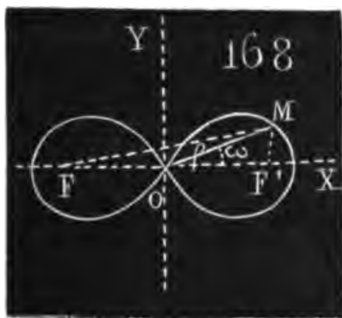
$$y^2 = \frac{x^3}{a - x};$$

d'où, en prenant l'origine et l'axe des X pour pôle et axe polaire,

$$\rho = \frac{a \sin.^2 \omega}{\cos. \omega}.$$

PROBLÈME V.

Déterminer le lieu du point dont le produit des distances à deux points fixes vaut le carré de la moitié de la distance de ces deux points (fig. 168).



Le lecteur aperçoit immédiatement que la droite FF′ est un axe de symétrie et qu'il en est de même pour la perpendiculaire OY élevée par le milieu de FF′.

Ceci posé, prenons le milieu de FF′ et cette droite ($FF' = 2a$) pour pôle et axe polaire ; il vient

$$F'M^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \omega, \quad FM^2 = \rho^2 + a^2 + 2a\rho \cos \omega,$$

d'où

$$\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos.\omega}. \quad \sqrt{\rho^2 + a^2 + 2a\rho \cos.\omega} = a^2;$$

et par suite, en faisant disparaître les radicaux et réduisant,

$$\rho^2 [\rho^2 - 2a^2 (2 \cos.^2 \omega - 1)] = 0;$$

c'est-à-dire

$$\rho^2 = 0 \quad \text{et} \quad \rho = a\sqrt{2}. \sqrt{\cos. 2\omega}.$$

Ainsi la courbe passe par l'origine qui est un point multiple; car on l'obtient soit en posant $\omega = 45$ et $\omega = 135°$.

N. B. En coordonnées rectangulaires OX et OY, le lecteur trouverait pour la *Lemniscate*

$$(y^2 + x^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4.$$

Problème VI.

Que représente $\rho = \dfrac{c}{a \cos.\omega + b \sin.\omega}$?

Prenons le pôle pour origine d'un système d'axes rectangulaires dont l'axe polaire serait celui des abscisses positives ; il vient

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}},$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c\sqrt{x^2+y^2}}{ax + by};$$

et par suite, en omettant le point conjugué donné par $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$,

$$ax + by = c.$$

Donc *le lieu est une droite*, car ρ ne peut être nul tant que c ne l'est point.

Problème VII.

Quel est le lieu de l'équation polaire $\rho = a \cos.\omega + b \sin.\omega$?

Il vient, pour un système rectiligne rectangulaire facile à concevoir,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

ou

$$x^2 - ax + y^2 - by = 0;$$

et par suite

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4};$$

c'est-à-dire *une circonférence ayant* $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ *pour centre*, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ *pour rayon et passant par le pôle.*

PROBLÈME VIII.

Caractériser la courbe $\rho=\frac{a \cos. \omega}{1-\sin. 2\omega}$.

On obtient, en passant à un système rectiligne convenable,

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}}{1-\frac{2xy}{x^2+y^2}},$$

ou

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ax\sqrt{x^2+y^2}}{(x-y)^2},$$

puis, omettant le point $\sqrt{x^2+y^2}=0$,

$$(x-y)^2=ax;$$

c'est-à-dire *une parabole passant par l'origine.*

PROBLÈME IX.

Obtenir l'équation polaire de la circonférence.

Considérons le cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (\varphi);$$

nous aurons, (a, b) étant le pôle et α' l'inclination de l'axe polaire sur l'axe des X,

$$\rho^2+2[a\cos.(\omega+\alpha')+b\sin.(\omega+\alpha')]\rho+(a^2+b^2-R^2)=0 \qquad (f).$$

Cette relation démontre que, quel que soit ω,

$$\rho'\rho''=\textit{constante};$$

c'est-à-dire les théorèmes relatifs au mode d'intersection dans deux cercles, *de deux sécantes* ou *d'une tangente et d'une sécante* passant par un même point.

L'équation (f) admet une forme plus élégante en y introduisant la distance d du pôle au centre et l'inclinaison α de cette distance sur l'axe des X : en effet, on a

$$a=d\cos.\alpha, \quad b=d\sin.\alpha \quad \text{et} \quad a^2+b^2=d^2,$$

d'où

$$\rho^2 + 2d\,[\cos.\,\alpha \cos.\,(\omega + \alpha') + \sin.\,\alpha \sin.\,(\omega + \alpha')]\,\rho + d^2 - R^2 = 0,$$

et par suite

$$\rho^2 + 2d \cos.\,(\omega + \alpha' - \alpha)\,\rho + d^2 - R^2 = 0 \qquad (f');$$

et, en désignant par β l'angle formé par d et l'axe polaire,

$$\rho^2 + 2d \cos.\,(\omega + \beta).\;\rho + d^2 - R^2 = 0 \qquad (f'').$$

Enfin, si d est l'axe polaire,

$$\rho^2 + 2d \cos.\,\omega.\;\rho + d^2 - R^2 = 0 \qquad (f''').$$

Exercices.

1° Que représente $\rho = \dfrac{p}{1 - e \cos.\,\omega}$?

2° Caractérisez $\rho \sin.\,(\omega - a) = d$.

3° Déterminez $\rho = \dfrac{c \sin.\,2\omega}{a \cos.\,\omega + b \sin.\,\omega}$.

§ XII.

Des coordonnées polaires.

LI° & LII° LEÇON.

SOMMAIRE.

Axes polaires de symétrie. — Asymptotes rectilignes en coordonnées polaires. — Circonférence & point asymptotique. — Tangente en coordonnées polaires. — Sous-tangente en coordonnées polaires. — Applications développées.

Axes polaires de symétrie.

218. Lorsqu'un axe polaire est *un axe de symétrie*, les rayons vecteurs ρ' et ρ'' des points symétriques M' et M'', par rapport à cet axe, feront avec cette droite fixe des angles égaux mais de signes contraires et donneront

$$\rho' = \rho''.$$

Donc, si l'équation polaire admet la solution $\rho = \rho'$ et $\omega = \omega'$, elle sera satisfaite par

$$\rho = \rho' \quad \text{et} \quad \omega = -\omega';$$

c'est-à-dire quelle devra rester identique en y changeant

$$\omega \text{ en } -\omega.$$

Si l'axe de symétrie formait un angle α avec l'axe polaire, en changeant ω en $\omega' + \alpha$ dans la fonction

$$f(\rho, \omega) = 0$$

il viendrait

$$f(\rho, \omega' + \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad f(\rho, -\omega' + \alpha) = 0,$$

puisque l'axe polaire serait alors celui de symétrie; c'est-à-dire que l'équation primitive devrait donner les mêmes valeurs pour ρ, en la mettant sous la forme

$$f(\rho, \alpha \pm \omega') = 0.$$

REMARQUES I. Le lecteur s'assurera facilement que si l'axe de symétrie passait par le pôle et était perpendiculaire à l'axe polaire, on obtiendrait la même valeur pour ρ, en posant

$$\omega = \omega' \quad \text{et} \quad \omega = 180^\circ - \omega';$$

c'est-à-dire que

$$f(\rho, \omega) = 0 \quad \text{et} \quad f(\rho, 180^\circ - \omega) = 0$$

seraient deux fonctions identiques.

II. Enfin, en admettant des rayons vecteurs négatifs,

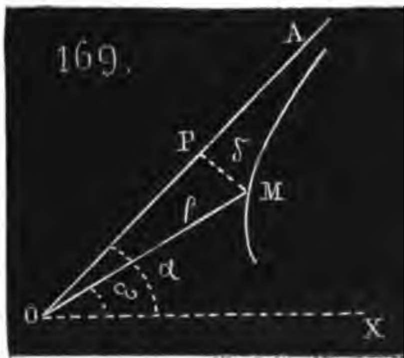
$$\omega = \omega' \quad \text{et} \quad \omega = 180 + \omega'$$

donneraient pour ρ deux valeurs égales, mais de signes contraires, si le pôle était un centre de symétrie; c'est-à-dire que

$$f(\rho, \omega) = 0 \quad \text{et} \quad f(-\rho, 180 + \omega') = 0$$

seraient dans ce cas deux fonctions identiques.

Asymptotes rectilignes en coordonnées polaires.



216. Lorsqu'une valeur spéciale de ω donne une solution infinie pour ρ, il y a probabilité de croire que la droite déterminée par cette valeur particulière de ω est une asymptote rectiligne *ou* du moins est parallèle à cette asymptote.

Soit OA une droite formant l'angle α avec l'axe polaire, et soit M un point quelconque de la courbe; nous aurons, pour la distance δ de ce point à la droite OA,

$$\delta = \rho \sin. (\alpha - \omega),$$

ou, pour obtenir la limite du δ,

$$\delta = \frac{\sin.(\alpha - \omega)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Or, en remplaçant ρ par sa valeur en ω, on obtient pour δ une fonction de ω dont on cherche la limite, pour $\omega = \alpha$, en posant

$$\omega = \alpha + h$$

d'où

$$\delta = \frac{-\sin. h}{f(\alpha + h)} = \frac{-\left\{\frac{\sin. h}{h}\right\}}{\left\{\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}\right\}}$$

car on a $f(\alpha) = 0$; et par suite

$$\textit{limite}\ \delta = \textit{limite}\ \frac{-\left(\frac{\sin. h}{h}\right)}{\left\{\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}\right\}} = \frac{-1}{\textit{limite}\left\{\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}\right\}}.$$

REMARQUES I. δ *indépendant de* ω : le lieu ayant tous ses points à égale distance de OA, sera une parallèle à OA.

II. δ *admet une limite* d, *positive* ou *négative*, *mais différente de zéro* : alors l'équation de l'asymptote sera

$$\rho \sin.(\alpha - \omega) = d;$$

et en y posant $\omega = 0$, on aura son intersection avec l'axe polaire. Il faudrait poser $\omega = 90°$, si on avait $\alpha = 0$, pour obtenir le point où l'asymptote rencontrerait la perpendiculaire menée par le pôle à l'axe polaire.

Circonférence & point asymptotique.

217. La *circonférence asymptotique* résulterait évidemment lorsque faisant croître ω jusqu'à une certaine limite, la valeur de ρ approcherait de plus en plus d'une limite a; et si cette constante a était nulle, la circonférence en se réduisant au *pôle* donnerait *un point asymptotique*.

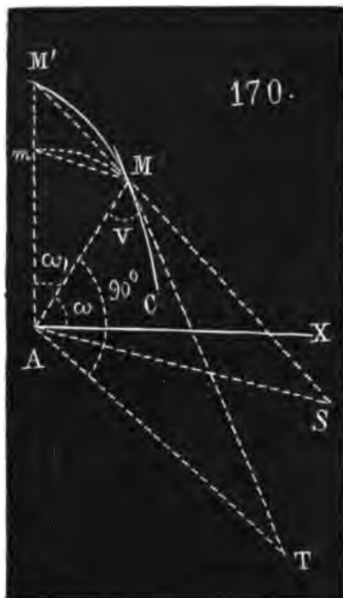
Tangentes en coordonnées polaires.

218. La tangente à une courbe en coordonnées polaires est déterminée par l'angle AMT qu'elle forme avec le rayon vecteur mené du pôle au point de contact (fig. 170).

Afin de déterminer cet angle AMT, considérons une sécante M'MS et l'arc de

cercle Mm dont A et AM sont le centre et le rayon; puis traçons, par le pôle, AS parallèle à la corde Mm de l'arc circulaire limité au second rayon vecteur AM'; nous obtenons deux triangles semblables ASM' et mMM' donnant

$$AS : Mm :: AM' : mM' \quad \text{ou} \quad AS : AM' :: Mm : mM'.$$



Or, si nous faisons pivoter la sécante M'MS autour du point M en rapprochant M' de M, avant qu'elle ne coupe la ligne en un point situé au-delà de M par rapport à M', elle sera devenue *tangente* en M à la courbe et la corde Mm de l'axe circulaire mM devenant la tangente à cet arc au point M, sa parallèle AS se transforme en une droite AT perpendiculaire à AM; donc, le *rapport* AS : AM' devient celui AT : AM = tg. AMT = tg. V.

Ainsi, d'après la proposition précédente,

$$\text{tg. AMT } ou \text{ tg. V} = limite \left\{ \frac{Mm}{M'm} \right\} \quad (1).$$

Ceci posé, soient (ω, ρ) les coordonnées polaires de M, $(\omega + \omega_1, \rho + \rho_1)$ celles du point M'; nous aurons, à cause du triangle isocèle MAm,

$$\frac{Mm}{M'm} = \frac{2\rho \sin. \frac{1}{2}\omega_1}{\rho_1} = \frac{\sin. \frac{1}{2}\omega_1}{\frac{1}{2}\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\rho_1} \cdot \rho.$$

Mais, à *la limite* $\omega_1 = 0$,

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}\omega_1}{\frac{1}{2}\omega_1} = 1;$$

et en posant

$$limite \frac{\omega_1}{\rho_1} = \theta,$$

Il vient

$$\text{tg. V} = \theta . \rho.$$

Donc, la grandeur angulaire cherchée dépend *de la limite du rapport de l'accroissement de l'angle polaire à celui du rayon vecteur* ρ; et cette limite se déduit de l'équation polaire de la courbe.

Sous-tangente en coordonnées polaires.

219. En coordonnées polaires, on appelle *sous-tangente* la partie AT de la

perpendiculaire, élevée par le pôle au rayon vecteur AM, comprise entre le pôle et la tangente en M, donc

$$\textit{sous-tangente} = \mathrm{AT} = \rho\ \mathrm{tg.}\ \mathrm{V} = \rho^2.\ \theta.$$

220. Voici quelques applications sur les théories précédentes.

Applications.

Problème I.

Le lieu $\rho = \dfrac{p}{1-e\cos\omega}$ admet-il un axe de symétrie ?

Changeons dans cette fonction ω en $-\omega$, elle devient

$$\rho = \frac{p}{1-e\cos.(-\omega)} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{1-e\cos.\omega};$$

donc l'axe polaire est un axe de symétrie.

Problème II.

Quels sont les axes de symétrie de la courbe $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\sin.\omega}}$?

D'abord on ne peut changer ω en $-\omega$, car ρ serait imaginaire ; mais en changeant ω en $180^\circ-\omega$, on obtient

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\sin.(180^\circ-\omega)}} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{a}{\sqrt{\sin.\omega}};$$

donc, la perpendiculaire menée du pôle à l'axe polaire est un axe de symétrie.

Problème III.

La Lemniscate a-t-elle des axes de symétrie ?

L'équation de cette courbe étant

$$\rho = a\frac{\sin.^2\omega}{\cos.\omega},$$

on reconnait que le changement de ω en $-\omega$ et de ρ en $-\rho$ avec ω en $180^\circ+\omega$ n'altèrent en rien l'équation précédente ; donc, l'axe polaire et sa perpendiculaire passant par le pôle sont deux axes de symétrie.

Problème IV.

Déterminer les axes de $\rho = b\sin.3\omega + a$.

A cet effet, changeons ω en $\alpha \pm \omega$, il vient

$$\rho = a + b\sin.3\alpha\cos.3\omega \pm b\cos.3\alpha\sin.3\omega;$$

donc, pour que le terme en sin. 3ω disparaisse, il faut poser

$$\cos. 3\alpha = 0;$$

d'où, en observant que α doit être compris entre 0° et 360° ou 3α entre 0° et 12.90°,

$$3\alpha = 90^\circ, = 90^\circ + 2.90^\circ, = 90^\circ + 4.90^\circ, = 90^\circ + 6.90^\circ, = 90^\circ + 8.90^\circ, = 90^\circ + 10.90^\circ:$$

et par suite

$$\alpha = 30^\circ, = 90^\circ, = 150^\circ, = 210^\circ, = 270^\circ, = 330^\circ.$$

Ainsi la courbe admet *six* axes de symétrie passant par le pôle, dont *trois* sont le prolongement des trois autres et *deux* rectangulaires entre eux.

PROBLÈME V.

Déterminer les asymptotes de $\rho = \dfrac{p}{1 - e \cos. \omega}$.

D'abord nous ferons remarquer que $\rho = \infty$ exigeant

$$1 - e \cos. \omega = 0 \qquad (1),$$

cela ne peut avoir lieu que pour

$$e > 1.$$

Ceci posé, nous avons

$$\delta = \rho \sin. (\theta - \omega),$$

θ étant la valeur de ω donnée par (1); d'où

$$\delta = \frac{p \sin. (\theta - \omega)}{1 - e \cos. \omega},$$

et, en posant $\omega = \theta + h$, il vient

$$\delta = \frac{-p \sin. h}{1 - \cos. (\theta + h)} = \frac{-p \sin. h}{[1 - e \cos. (\theta + h)] - (1 - e \cos. \theta)};$$

car $1 - e \cos. \theta = 0$.

Or, cette valeur de δ peut s'écrire

$$\delta = \frac{-p \dfrac{\sin. h}{h}}{\dfrac{[1 - e \cos. (\theta + h)] - (1 - e \cos. \theta)}{h}} = \frac{-p \dfrac{\sin. h}{h}}{\dfrac{e [\cos. \theta - \cos. (\theta + h)]}{h}},$$

ou

$$\delta = -\frac{p}{e} \cdot \frac{\dfrac{\sin. h}{h}}{\dfrac{2 \sin. \frac{1}{2} (2\theta + h) \sin. \frac{1}{2} h}{h}} = -\frac{p}{e} \cdot \frac{\dfrac{\sin. h}{h}}{\sin. (\theta + \frac{1}{2} h) . \dfrac{\sin. \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h}}.$$

Or, en posant $h = 0$, et observant que

$$\textit{limite} \frac{\sin. h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \textit{limite} \frac{\sin. \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} = 1,$$

on obtient

$$limite\ \delta = -\frac{p}{e}.\frac{1}{\sin.\theta} = -\frac{p}{e}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}} = \frac{-p}{\sqrt{e^2-1}} = d;$$

et par suite

$$\rho \sin.(\theta-\omega) = \frac{-p}{\sqrt{e^2-1}}$$

sera l'équation d'une asymptote du lieu; de plus, la courbe étant symétrique par rapport à l'axe polaire,

$$\rho \sin.(\theta+\omega) = \frac{-p}{\sqrt{e^2-1}}$$

sera celle d'une seconde asymptote.

N. B. Le lecteur verra plus loin que le lieu proposé n'est autre qu'une hyperbole en coordonnées polaires, ayant pour *pôle* le foyer de droite et pour *axe polaire* l'axe transverse.

Problème VI.

La courbe $\rho = a$ tg. ω a-t-elle des asymptotes?

Or, $\omega = 90°$ donne

$$\rho = \infty;$$

posons donc

$$\delta = \rho \sin.(90° - \omega) = a \operatorname{tg}.\omega \cos.\omega = a \sin.\omega,$$

et par suite de $\omega = 90°$

$$limite\ \delta = d = a.$$

Ainsi la droite menée par le pôle et perpendiculaire à l'axe polaire n'est point une asymptote; mais la courbe admet deux asymptotes parallèles à la droite précédente et distante de $\pm a$ du pôle, car le pôle est un centre de symétrie.

De même $\omega = 270°$ donnerait une seconde asymptote perpendiculaire à l'axe polaire et à la distance a de l'autre côté du pôle.

Problème VII.

Déterminer la tangente & la sous-tangente de $\rho = \dfrac{p}{1-e\cos.\omega}$.

Nous avons

$$\rho_1 = \frac{p}{1-e\cos.(\omega+\omega_1)} - \frac{p}{1-e\cos.\omega} = \frac{pe[\cos.(\omega+\omega_1)-\cos.\omega]}{(1-e\cos.\omega)[1-e\cos.(\omega+\omega_1)]},$$

donc

$$\frac{\omega_1}{\rho_1} = \frac{\omega_1(1-e\cos.\omega)[1-e\cos.(\omega+\omega_1)]}{pe[\cos.(\omega+\omega_1)-\cos.\omega]};$$

et en transformant le dénominateur, par une formule trigonométrique,

$$\frac{\omega_1}{\rho_1} = \frac{1 - e\cos.\omega}{pe} \times \frac{1 - e\cos.(\omega + \omega_1)}{\sin.(\omega + \frac{1}{2}\omega_1)} \times \frac{\frac{1}{2}\omega_1}{\sin.\frac{1}{2}\omega_1} \times -1.$$

Or, la limite $\omega = 0$ donne

$$limite\,\frac{1 - e\cos.(\omega + \omega_1)}{\sin.(\omega + \frac{1}{2}\omega_1)} = \frac{1 - e\cos.\omega}{\sin.\omega} \quad \text{et} \quad limite\,\frac{\frac{1}{2}\omega_1}{\sin.\frac{1}{2}\omega_1} = 1,$$

donc

$$\theta = limite\left\{\frac{\omega_1}{\rho_1}\right\} = -\frac{(1 - e\cos.\omega)^2}{pe\sin.\omega};$$

d'où, pour *la tangente* à la courbe,

$$\text{tg.}\,V = \theta.\rho = -\frac{1 - e\cos.\omega}{e\sin.\omega};$$

et pour *la sous-tangente*

$$\frac{-p}{e\sin.\omega}.$$

REMARQUE. Le lecteur s'aperçoit immédiatement qu'aux intersections seules de l'axe polaire et de la courbe, *la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur du point de contact;* et cela soit qu'il considère tg. V *ou* la sous-tangente.

N. B. L'équation précédente représente les trois courbes du second ordre, rapportées à l'axe transverse pour axe polaire et au foyer de droite pour pôle; et c'est *une ellipse*, *une parabole* ou *une hyperbole* suivant que l'on a

$$e \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1.$$

PROBLÈME VIII.

Quelles sont les particularités d'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur du point de contact de la courbe $\rho = a + \frac{m}{\omega}$?

Ici nous avons

$$\rho_1 = \left\{a + \frac{m}{\omega + \omega_1}\right\} - \left\{a + \frac{m}{\omega}\right\} = \frac{-m\omega_1}{\omega(\omega + \omega_1)},$$

d'où

$$\frac{\omega_1}{\rho_1} = \frac{-\omega(\omega + \omega_1)}{m};$$

et par suite

$$limite\left(\frac{\omega_1}{\rho_1}\right) = \theta = \frac{-\omega^2}{m} \quad \text{et} \quad \text{tg.}\,V = -\frac{\omega}{m}(a\omega + m).$$

Ainsi ρ et l'angle V sont *nuls* pour $\omega = -\frac{m}{a}$; c'est-à-dire que *le rayon vecteur est tangent à la courbe au pôle*. Enfin, V approche d'autant plus d'être droit que ω est plus grand.

REMARQUE. Cet exemple nous a donné $\rho = 0$ et $V = 0$ pour une certaine valeur de ω, et de plus nous a indiqué que le rayon vecteur du point de contact est tangent à la courbe. Ceci est toujours vrai : en effet, supposons que

$$\omega = \alpha \quad \text{donne} \quad \rho = 0,$$

alors la droite

$$\omega = \alpha$$

sera une tangente; car elle est la limite vers laquelle tend une sécante passant par le pôle, quand on la fait tourner autour de ce point jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne se confondre avec le premier.

PROBLÈME IX.

Déterminer la tangente de la spirale d'Archimède $\rho = \omega$.

On obtient

$$\text{tg. V.} = \omega.$$

Ainsi, à mesure que ω croît, la tangente forme, avec le rayon vecteur du point de contact, un angle s'approchant de plus en plus de 90°, et comme

$$\omega = 0$$

donne

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \text{tg. V} = 0;$$

l'axe polaire et une tangente au pôle.

221. REMARQUE. Dans ce qui précède, nous n'avons pu considérer que des exemples simples, car l'application générale de cette théorie exige la haute analyse; c'est-à-dire qu'il nous aurait fallu sortir du cadre des leçons imposées par le programme des athénées.

§ XII.

Des coordonnées polaires.

LIIIe, LIVe & LVe LEÇON.

SOMMAIRE.

De l'équation polaire des courbes du second ordre : Ellipse, Parabole & Hyperbole; Corollaire. — Applications. — Exercices.

Ellipse.

222. Considérons l'ellipse rapportée à ses axes, c'est-à-dire

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (E),$$

et prenons le foyer de droite pour *pôle* et l'axe des foyers pour *axe polaire;* nous aurons évidemment

$$y = \rho \sin. \omega, \quad x = c + \rho \cos. \omega;$$

et par suite, pour (E),

$$(a^2 - c^2 \cos.^2 \omega)\, \rho^2 + 2\,(a^2 - c^2)\, c \cos. \omega.\, \rho - (a^2 - c^2)^2 = 0;$$

d'où, en résolvant, remplaçant $a^2 - c^2$ par b^2 et séparant les valeurs,

$$\rho' = \frac{b^2}{a + c \cos. \omega}, \quad \rho'' = \frac{-b^2}{a - c \cos. \omega}.$$

DISCUSSION. c étant moindre que a, ρ' sera toujours *positif* et ρ'' constamment *négatif*; mais $\omega = \omega'$ donne

$$\rho'_1 = \frac{b^2}{a + c\cos.\omega'} \quad \text{et} \quad \rho''_1 = \frac{-b^2}{a - c\cos.\omega'};$$

et de $\omega = 180^\circ + \omega'$ on déduit

$$\rho'_2 = \frac{b^2}{a - c\cos.\omega'} \quad \text{et} \quad \rho''_2 = \frac{-b^2}{a + c\cos.\omega'}.$$

Donc, comme ces rayons vecteurs sont dans le prolongement l'un de l'autre et que

$$\rho''_2 = -\rho'_1 \quad \text{et} \quad \rho''_1 = -\rho'_2$$

on peut conclure que les valeurs de ρ' pourront suffire en faisant passer ω de 0° à 360°, ce qui revient à dire qu'on peut et qu'on doit négliger les valeurs négatives de ρ pour la série considérée des valeurs de ω.

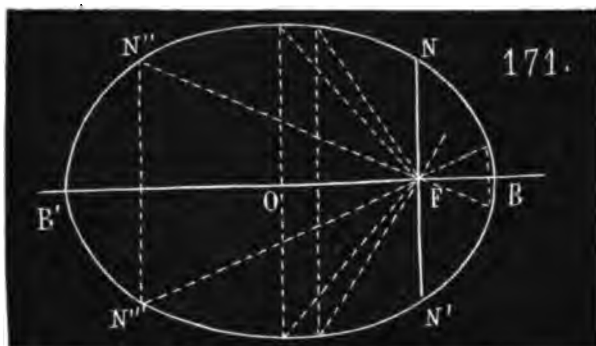
Ceci posé, soit $b^2 = ap$ et $c = ae$, on obtient

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos.\omega};$$

et comme le changement de ω en $-\omega$ n'apporte aucune altération à la fonction précédente, cette dernière représente un lieu symétrique par rapport à l'axe polaire. Il suffit donc de construire la portion du lieu situé au dessus de cet axe, *ou* de faire passer ω depuis 0° jusqu'à 180°.

CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE : I. De $\omega = 0°$ à $\omega = 90°$: $\omega = 0°$ donne (fig. 171)

$$\rho = \frac{p}{1+e} = \frac{a^2 - c^2}{a + c} = a - c = \text{FB};$$



c'est-à-dire le sommet B.

Si maintenant ω croît depuis 0° jusqu'à 90°, cos. ω diminue de 1 à 0 et ρ augmente en même temps depuis $a - c$ jusqu'à p; d'où le point N.

II. De $\omega = 90°$ à $\omega = 180°$: $\omega = 90°$ a donné le point N; si maintenant ω varie de cette dernière valeur jusqu'à 180°, cos. ω devient *négatif* et ρ augmente jusqu'à

$$\rho' = \frac{p}{1-e} = \frac{a^2 - c^2}{a - c} = a + c,$$

d'où on déduit le point B'; et par suite on possède la première moitié BNN''B' du lieu.

L'axe polaire étant une ligne de symétrie ; de $\omega = 180°$ à $\omega = 270°$, on déterminerait la portion B'N'''N' symétrique de B'N''N, tandis que l'arc elliptique N'B serait donné par les valeurs de ω depuis 270° jusqu'à $\omega = 360°$.

Parabole.



En rapportant cette courbe à son axe et à sa tangente au sommet, nous avons trouvé pour la distance du foyer à un de ses points

$$\rho = x + \frac{p}{2};$$

d'où, en prenant l'axe de la courbe pour celui *polaire* et le point F pour pôle (fig. 173),

$$\rho = p + \rho \cos. \omega;$$

et par suite

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos. \omega}.$$

DISCUSSION. Cette valeur de ρ accuse que l'axe polaire est *un axe de symétrie* et qu'il suffira de faire varier ω de 0° à 180°.

CONSTRUCTION DE LA PARABOLE : I. De $\omega = 0°$ à $\omega = 90°$: $\omega = 0°$ donnant

$$\rho = \frac{p}{0} = \infty,$$

on en déduit que l'axe FX ne rencontre la courbe qu'à l'infini et dans le sens de F vers X, puisqu'une valeur de ω précédant 0° donnerait pour ρ une valeur positive.

Maintenant ω croissant de 0° à 90°, ρ reste *positif* et décroît jusqu'à

$$\rho = p = \text{FN}$$

obtenu pour $\omega = 90°$; d'où la portion SMN qui venant de l'infini s'arrête en N.

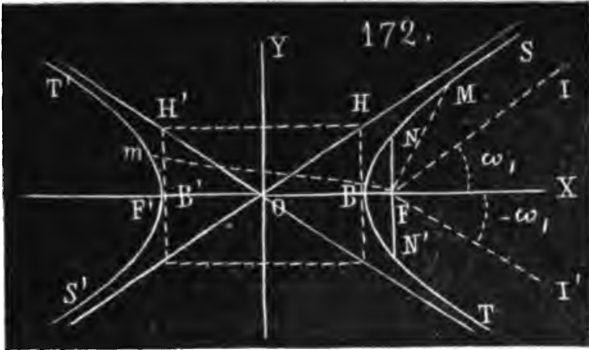
II. De $\omega = 90°$ à $\omega = 180°$: de $\omega = 90°$, déterminant le point N, jusqu'à $\omega = 180°$, cos. ω étant négatif, ρ reste encore positif et *décroît* jusqu'à

$$\rho = \frac{p}{2} = \text{FO}$$

donné par $\omega = 180°$; et par suite la partie NO.

Enfin, le lecteur concluera l'existence de ON' en faisant croître ω depuis 180° jusqu'à 270° et celle de la partie infinie N'S' pour ω variant de 270° à 360°.

Hyperbole.



Afin de varier les méthodes d'investigation, nous emploierons directement les distances du foyer F à chacun des points de la courbe, savoir :

$$\rho = \frac{cx}{a} - a \quad \text{et} \quad \rho' = -\frac{cx}{a} + a$$

suivant que le point M est situé sur la branche du foyer considéré *ou* sur l'autre branche (fig. 172).

Or, quelle que soit la position du point M,

$$x = c + \rho \cos.\omega,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{c^2 - a^2}{a - c\cos.\omega} = \frac{b^2}{a - c\cos.\omega} = \frac{p}{1 - e\cos.\omega}, \\ \rho' &= \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos.\omega} = \frac{-b^2}{a + c\cos.\omega} = \frac{-p}{1 + e\cos.\omega}; \end{aligned}\right\} \text{avec } \frac{b^2}{a} = p \quad et \quad \frac{c}{a} = e > 1.$$

Discussion. D'abord ces valeurs de ρ ne dépendant que de $\cos.\omega$, il s'ensuit que l'axe polaire est *un axe de symétrie*, et il suffira de faire varier ω de 0° à 180°; mais dans le cas actuel, il serait assez avantageux de montrer qu'une des valeurs de ρ suffit pour construire la courbe : à cet effet, remarquons que l'on aura

$$\rho < 0 \quad \text{pour} \quad 1 - e\cos.\omega < 0,$$

ou, en appelant ω_1 cette valeur de l'angle polaire,

$$\cos.\omega_1 > \frac{1}{e}.$$

Ceci posé, considérons

$$\omega = \omega_1 \text{ pour } \rho \quad \text{et} \quad \omega = 180 + \omega_1 \text{ pour } \rho_1,$$

il vient

$$\rho_1 = \frac{p}{1 - e\cos.\omega_1} < 0 \quad \text{et} \quad \rho'_1 = \frac{-p}{1 - e\cos.\omega_1} > 0;$$

c'est-à-dire que *numériquement*

$$\rho_1 = \rho'_1,$$

et ces deux rayons vecteurs sont opposés et en ligne droite. Donc, il suffira de considérer les valeurs de ρ, mais d'avoir soin d'en porter les valeurs négatives en sens opposé à celui fixé par l'hypothèse correspondant à ω.

CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE. I. De $\omega = 0°$ à ω donné par $1 - e \cos. \omega = 0$: $\omega = 0°$ donne

$$\rho = \frac{p}{1-e} = \frac{c^2 - a^2}{a - c} = -(a + c) = \text{FO} + \text{OB}' = \text{FB}';$$

c'est-à-dire le sommet B', puisque ρ doit être dirigé en sens contraire de FX.

L'angle ω croissant, ρ reste constamment *négatif* jusqu'à

$$1 - e \cos. \omega = 0;$$

c'est-à-dire, ω_1 étant cette valeur spéciale,

$$\cos. \omega_1 = \frac{1}{e} = \frac{a}{e} = \cos. \text{HOB}.$$

Ainsi depuis

$$\omega = 0° \text{ jusqu'à } \omega = \text{IFX} = \text{HOB},$$

ρ toujours *négatif* croît *numériquement* depuis

FB' jusqu'à l'*infini*,

ce qui donne la branche B'S'.

Lorsque ω, ayant dépassé $\omega_1 = \text{IFX}$, augmente jusqu'à 90°, ρ deviendra *positif* et diminuera depuis

l'*infini* jusqu'à $\text{FN} = p$;

d'où la portion SMN.

II. De $\omega = 90°$ à $\omega = 180°$: $\omega = 90°$ a donné le point N, au-delà de cette valeur de ω jusqu'à $\omega = 180°$, cos. ω étant négatif, la valeur de ρ reste toujours positive et on obtient, par une série de valeurs décroissantes, les points de la partie NB ; car $\omega = 180°$ donne

$$\rho = \frac{p}{1+e} = \frac{c^2 - a^2}{c + a} = c - a = \text{FO} - \text{OB} = \text{FB}.$$

Maintenant la symétrie de la courbe par rapport à l'axe polaire, indique spontanément que de $\omega = 180°$ à $\omega = 270°$: on détermine la portion BN'; et que de $\omega = 270°$ à $\omega = 360° - \omega_1$: on a la partie *infinie* N'T ; tandis que la suite $\omega = 360° - \omega_1, = \ldots = 360°$, fixe la branche également *infinie* TB'.

N. B. Le lecteur aura judicieusement observé que les directions de FI et de FI' *ou* $\omega = \omega_1$ et $\omega = 360° - \omega_1$ ne sont autres que celles des asymptotes OH et OH' de la courbe.

Équation polaire des trois courbes du second ordre.

223. L'équation

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos . \omega}$$

caractérise donc les trois courbes du second ordre, en tant qu'on les considère rapportées à l'axe des foyers pour *axe polaire* et au foyer de droite pour *pôle*; seulement on a

$$e \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1,$$

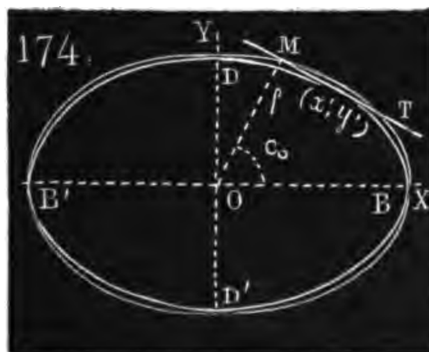
suivant que la courbe est *une Ellipse*, *une Parabole* ou *une Hyperbole*.

224. Voici une nouvelle série d'applications.

Applications.

Problème I.

Quel est le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur sa tangente (fig. 174) ?



D'abord il résulte de la génération indiquée, que les sommets de l'ellipse appartiennent au lieu demandé; de plus, la suite indéfinie des parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, indique que ce lieu a pour centre celui de l'ellipse, et que les points B, B, d'une part et D, D' d'autre part sont les points les plus éloignés et les plus rapprochés du centre.

Ceci posé, procédons analytiquement en coordonnées rectilignes, nous avons

$$\text{E)}\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \quad \text{(G)}, \quad a^2xy' - b^2yx' = 0 \quad \text{(G,}$$

pour les équations de l'ellipse, de la tangente en un point (x', y') de cette dernière et de la projetante du centre sur la tangente; puis

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

est l'équation de condition du mouvement du point (x', y').

Il nous faut donc éliminer x' et y' entre (G), (G') et (1) : or, les deux premières donnent

$$y') \qquad y' = \frac{b^2y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad x' = \frac{a^2x}{x^2 + y^2} \qquad (x',$$

et par suite, en substituant dans (1),

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 \qquad (\varphi)$$

sera l'équation du lieu.

Cette fonction (φ) a même centre que (E), mêmes axes de symétrie et donne l'origine pour point conjugué, mais étranger au problème proposé; et comme en développant (φ) et résolvant par rapport à y qui serait de la forme $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, cela n'aurait d'autre avantage que de reconnaître que l'on doit avoir $x \gtrless a$, ce qu'on sait fort bien; il est donc préférable de passer directement aux coordonnées polaires, en prenant pour *pôle* l'origine actuelle et la droite des foyers pour axe polaire.

Nous avons donc

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos.\, \omega, \\ y &= \rho \sin.\, \omega, \end{aligned}\right\} \text{ d'où, pour } (\varphi), \ \left\{ \rho^2 = a^2 \cos.^2\omega + b \sin^2\omega; \right.$$

et, en remplaçant $\cos.^2 \omega$ par $1 - \sin.^2 \omega$ et $a^2 - b^2$ par c^2,

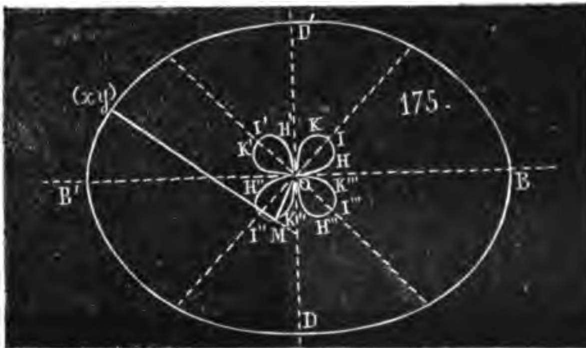
$$\rho^2 = a^2 - c^2 \sin.^2 \omega \qquad (\rho).$$

DISCUSSION. Cette valeur de ρ toujours réelle, puisque l'on a $c < a$ et $\sin.\, \omega < 1$, donne l'axe polaire et sa perpendiculaire par le pôle pour axes de symétrie. Donc, il s'agira de faire croître ω de 0° à 90° pour obtenir la partie BMD, celle DB' donnée par les variations de 90° à 180° devant être symétrique par rapport à DD'; et ainsi de suite.

N. B. Les valeurs (x') et (y') ont indiqué au lecteur que chaque point du lieu est dans le même angle des axes coordonnés que le point de contact de la tangente correspondante.

PROBLÈME II.

Déterminer le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur ses normales (fig. 175).



D'abord les sommets de l'ellipse donnent le même point, c'est-à-dire le *centre* de cette courbe, donc plusieurs branches du lieu cherché convergent en O.

Ceci posé,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{(E)}$$

étant l'ellipse directrice,

$$\text{(G)} \quad y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'), \qquad y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x \quad \text{(G')}$$

seront les équations de la normale au point (x', y') de (E) et de la projetante du centre sur cette droite; et

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

sera l'équation de condition statant sur la position de (x', y').

Or, (G′) et (1) donnent

$$(x') \qquad x' = \frac{\pm a^2 y}{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}, \qquad y' = \frac{\mp b^2 x}{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}} \qquad (y');$$

d'où, en substituant ces valeurs dans (G), on obtient

$$(a^2y^2 + b^2x^2)(x^2 + y^2)^2 = c^4x^2y^2 \qquad (\varphi)$$

pour l'équation rectiligne du lieu demandé.

La forme de (φ) indique que les axes de l'ellipse sont aussi des axes de symétrie de (φ), et les valeurs (x'), (y') indiquent que chaque point de (φ) est dans un angle coordonné différent de celui du point (x', y') qui l'a déterminé.

Maintenant pour construire (φ), qui développé serait du *sixième degré*, nous ferons usage des coordonnées polaires ayant l'origine pour *pôle* et la droite des X pour *axe polaire;* donc

$$x = \rho \cos.\,\omega \quad \text{et} \quad y = \rho \sin.\,\omega;$$

et par suite

$$\rho^2 = \frac{c^4 \sin.^2\omega \cos.^2\omega}{a^2 \sin.^2\omega + b^2 \cos^2\omega} \quad \text{ou} \quad \rho^2 = \frac{c^4 \sin.^2\omega \cos.^2\omega}{a^2 - c^2 \cos.^2\omega} \qquad (\rho),$$

après avoir supprimé la solution *quadruple* $\rho^4 = 0$.

Discussion. Nous pouvons écrire ρ^2 de la manière suivante

$$\rho^2 = \frac{c^2e^2 \cos.^2\omega\,(1 - \cos.^2\omega)}{1 - e^2 \cos.^2\omega},$$

en posant $c = ae$; et comme de $e < 1$ on déduit

$$1 - e^2 \cos.^2\omega > 1 - \cos.^2\omega \quad \text{on a} \quad \rho < ce \cos.\,\omega.$$

I. De $\omega = 0°$ à $\omega = 90°$. Ces valeurs extrêmes de ω donnent $\rho = 0$; c'est-à-dire que la courbe partant du point O revient au même point; et comme

$$\rho < ce \cos.\,\omega,$$

il faut que ρ après avoir augmenté, soit soumis à une décroissance pour redevenir nul, ce qui nous permet de supposer l'existence d'un *maximum :* en effet, en résolvant (ρ) par rapport à $\sin.^2\omega$, il vient

$$\sin.^2\omega = \frac{c^2 - \rho^2 \pm \sqrt{(c^2 + \rho^2)^2 - 4a^2\rho^2}}{2c^2}.$$

Or, le *maximum* de ρ sera donné par

$$(c^2 + \rho^2)^2 = 4a^2\rho^2 \quad \text{ou} \quad \rho = a \pm b;$$

mais sin. ω simplifié exigeant

$$\rho \leqq b + a \quad \text{et} \quad \rho \leqq a - b,$$

on ne peut qu'avoir

$$\textit{maximum}\ \rho = a - b$$

correspondant à

$$\sin.\ \omega = \sqrt{\frac{b}{a+b}} = \sin.\ \omega_1.$$

Ainsi depuis $\omega = 0^\circ$ jusqu'à $\omega = \omega_1$ on obtient la partie OHI ($OI = a - b$) et de $\omega = \omega_1$ à $\omega = 90^\circ$ on détermine IKO ; et l'ensemble OHIKO constitue une espèce de *feuille*.

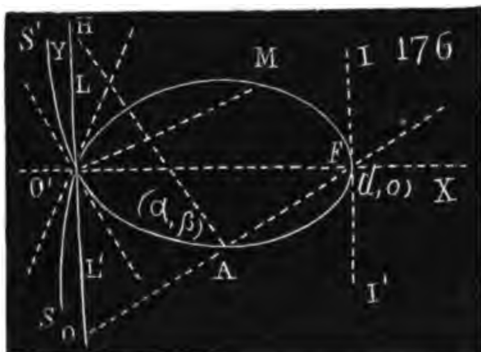
L'axe de symétrie DD′ fournira la feuille OH′I′K′O, de $\omega = 90^\circ$ jusqu'à $\omega = 180^\circ$; puis ω croissant jusqu'à 270° on déterminera OH″I‴K″O ; et enfin l'angle polaire continuant de croître jusqu'à 360°, la courbe sera completée par une quatrième feuille OH‴I‴K‴O.

N. B. Il n'est pas dépourvu de caractère de faire remarquer au lecteur que le lieu étant continu doit se lire

OHIKOH‴I‴K‴OH″I″K″OH′I′K′OH....

PROBLÈME III.

Quel est le lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote et un foyer communs (fig. 176).



Soient LL′ et F l'asymptote et le foyer donnés ; et A un des sommets d'une des hyperboles génératrices dont le petit axe sera *constant* et égal à $FO' = d$, distance du foyer à l'asymptote.

Ceci posé, prenons FO′ et LL′ pour axes coordonnés : l'axe FA coupera LL′ au centre O de la courbe ; on doit avoir

$$OA = OO' \qquad (1).$$

Or, (α, β) désignant les coordonnées du point A,

$$y = \frac{\beta}{\alpha - d}(x - d)$$

sera l'équation de FA, donc

$$OO' = \frac{-d\beta}{\alpha - d}.$$

D'un autre côté

$$OA^2 = \alpha^2 + (\beta - OO')^2 = \alpha^2 + \left(\beta + \frac{d\beta}{\alpha - d}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha - d)^2};$$

et par suite, à cause de (1),

$$\alpha^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha - d)^2} = \frac{d^2\beta^2}{(\alpha - d)^2},$$

ou

$$\alpha^2(\alpha - d)^2 + \beta^2(\alpha^2 - d^2) \qquad (\varphi).$$

Cette fonction (φ) donne d'abord

$$\alpha = d,$$

c'est-à-dire *la parallèle tracée par le foyer à l'asymptote;* donc, après avoir ôté de (φ) cette solution étrangère, il vient pour le lieu demandé

$$\alpha^2(\alpha - d) + \beta^2(\alpha + d) = 0 \qquad (\varphi');$$

et on reconnaît que (φ') admet *le foyer* F (d, o) et l'origine O' $(0, 0)$ pour *solutions analytiques*, mais *géométriquement* étrangères au problème.

Maintenant pour construire et discuter (φ'), nous allons prendre pour *pôle* l'origine O et OX pour *axe polaire;* donc

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \rho \cos.\omega,\\ \beta &= \rho \sin.\omega,\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{ \rho = \frac{d\cos.2\omega}{\cos.\omega} = \frac{d(2\cos.^2\omega - 1)}{\cos.\omega} \right. \qquad (\varphi'');$$

toutefois après avoir retranché la double solution

$$\rho^2 = 0,$$

qui indique que l'origine est un point multiple; c'est-à-dire un point où arrive plusieurs branches du lieu.

Discussion. La forme (φ'') ne dépendant que du *cos.*, on peut déjà reconnaître que l'axe polaire est un *axe de symétrie;* donc il suffira de faire croître ω depuis 0° jusqu'à 180° et construire ensuite la partie symétrique, par rapport à O'F, de celle obtenue par ces variations de ω; de plus, comme $\omega = 90°$ donne

$$\rho = \infty,$$

nous passerons par l'intervalle $\omega = 45°$ en allant de $\omega = 0$ à $\omega = 90°$.

I. De $\omega = 0°$ à $\omega = 45°$; $\omega = 0°$ donne $\rho = d$; c'est-à-dire le point F : ensuite ω croissant de 0° à 45°, ρ décroît constamment depuis d jusqu'à 0, d'où on déduit

FMO'.

II. De $\omega = 45°$ à $\omega = 90°$: ω dépassant 45°, cos. ω devient *négatif*, et en portant les valeurs de ρ en sens contraire de *la direction* imposée par ces valeurs de ω, car ces hypothèses de ω à partir de $\omega > 180° + 45°$ à $\omega < 270°$ donneraient les mêmes valeurs prises *positivement*, on obtiendra les points de la partie

O'S.

III. Depuis $\omega = 90°$ à $\omega = 135°$: les valeurs de ρ sont *positives* et déterminent les points de la branche

O'S'.

IV. Enfin de $\omega = 135°$ à $\omega = 180°$. Les rayons vecteurs deviennent *négatifs* et, par une raison semblable à celle de l'hypothèse II, permettent de tracer la partie complémentaire de la figure; c'est-à-dire

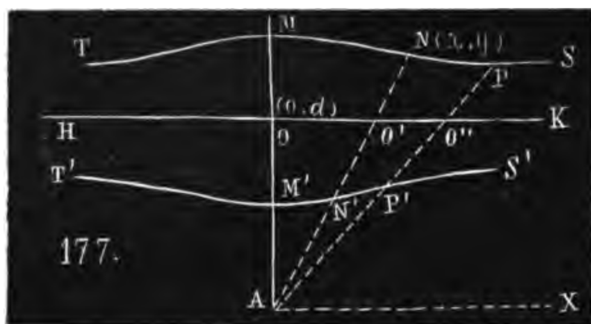
O'AF.

N. B. Le lecteur devra, pour bien saisir la continuité de cette figure, lire

S'O'AFMO'S ou SO'MFAO'S'.

PROBLÈME IV.

Étant donnés une droite HK (fig. 177) et un point A : on trace les sécantes AM, AN, AP,..... sur lesquelles on porte d'un même côté de HK une longueur constante MO = NO' = PO'' = ... = *l* ou M'O = N'O' = P'O'' = ... = *l*; quel est le lieu des points M, N, P,... ou M', N', P',..... (Conchoïde de Nicomède)?



D'abord, nous remarquerons que ce lieu donne deux branches situées de part et d'autre de HK, et ayant *probablement* cette droite pour asymptote commune.

Ceci posé, prenons A pour origine et pour axes coordonnés AM, AX perpendiculaire et parallèle à HK; et désignons par d la distance AO, nous obtenons d'abord deux points sur OY et symétriques par rapport à HK.

Or, (x, y) étant les coordonnées du point N du lieu, on a

$$\mathrm{AN} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

d'un autre côté de

$$\mathrm{tg.\ NAX} = \frac{y}{x} = \mathrm{tg.\ OO'A},$$

on déduit

$$1 : \mathrm{sin.\ OO'A} :: \mathrm{AO'} : d;$$

d'où

$$\mathrm{AO'} = \frac{d}{\mathrm{sin.\ OO'A}} = \frac{d\sqrt{1 + \mathrm{tg.}^2\,\mathrm{OO'A}}}{\mathrm{tg.\ OO'A}} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{y};$$

et, par suite de la génération du lieu,

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \pm l \qquad (1),$$

suivant que le point N est situé au-dessus de HK ou (N') situé au-dessous de la même droite.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(y - d)\sqrt{x^2 + y^2} = \pm ly \qquad (2),$$

et on reconnaît spontanément que la droite

$$y = d$$

ou HK, est bien *une asymptote;* et que l'origine A est *un point conjugué* ou *analytique;* c'est-à-dire étranger au lieu demandé.

Maintenant pour construire ce lieu, fixons-le en cordonnées polaires et posons

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \cos.\ \omega, \\ y = \rho \sin.\ \omega, \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{ \rho = d \text{ cosec. } \omega \pm l \quad (\varphi'), \right.$$

en négligeant le point A.

DISCUSSION. D'abord (φ') indique que AY est un axe de symétrie, puisque $\omega = \omega_1$ et $\omega = 180 - \omega_1$ fournissent la même valeur pour ρ. Ainsi, il suffira de faire croître ω de 0° à 90°.

De $\omega = 0°$ à $\omega = 90°$: $\omega = 0°$ donne

$$\rho = \infty \pm l;$$

c'est-à-dire que la courbe vient de l'*infini positif* en S *ou* en S′ (*en considérant une valeur de ω un peu supérieure à* 0); puis ω croissant jusqu'à $\omega = 90°$, ρ diminue et devient, pour la valeur extrême,

$$d \pm l;$$

donc on obtient M ou M′; et par suite la portion SNM ou S′N′M′.

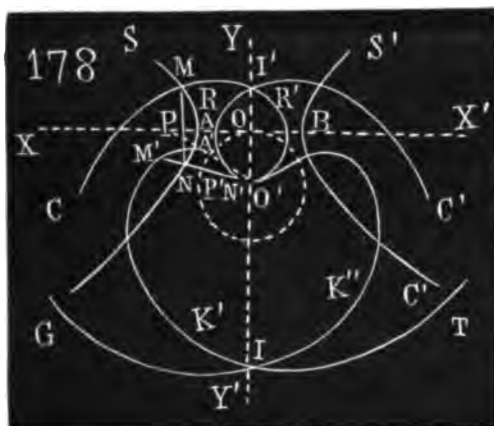
Enfin, à cause de l'axe de symétrie AY, de $\omega = 90°$ à $\omega = 180°$, on déterminera la branche MT *ou* celle M′T′.

***Remarque.* En faisant croître ω de 180° à 270° puis de 270° à 360°, ρ serait constamment *négatif* et ces valeurs de ω donneraient MS *ou* M′S′ puis MT *ou* M′T′ lorsqu'on porterait ces rayons vecteurs en sens opposé à celui déterminé par les hypothèses faites sur ω.**

N. B. En transportant l'origine de (φ) au point 0 et convertissant après en coordonnées polaires, le lecteur trouverait une *équation polaire complète du* 4me *degré;* c'est-à-dire qu'il aurait compliqué l'étude du lieu demandé.

PROBLÈME V.

A partir du centre fixe d'une hyperbole équilatère, les deux parties de l'axe transverse de cette courbe s'enroulent de part et d'autre, sur une circonférence tangente au point milieu de cet axe : Quel est le lieu des positions nouvelles de chaque point de cette hyperbole (fig. 178)?



Considérons l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 = -a^2 \quad \text{(D)},$$

et déterminons l'équation polaire en prenant pour *pôle* le centre O′ du cercle sur lequel s'enroule l'axe transverse et OY pour *axe polaire;* alors r étant le rayon de la circonférence, et l'abscisse, sur l'axe, OP′; PM perpendiculaire sur AP sera le prolongement du rayon OP′ : M sera en M′ et N en N′ de telle sorte que

$$OM' = r + y \quad \text{et} \quad ON' = r - y;$$

et, en général,

$$\rho = r \pm y \quad \textbf{(1)}.$$

Mais ω, dans le cercle OO', donne

$$\omega = \frac{\widehat{OP'}}{r} = \frac{x}{r},$$

donc

$$x = r\omega;$$

et par suite

$$y = \pm\sqrt{r^2\omega^2 - a^2},$$

d'où, pour (1),

$$\rho = r \pm \sqrt{r^2\omega^2 - a^2} \qquad (\varphi).$$

N. B. La variable ω entrant comme longueur d'un arc ayant l'unité pour rayon, la courbe sera en *évolution*.

DISCUSSION. Remarquons que (φ) ne subit aucune altération en y changeant ω en $-\omega$, donc l'axe polaire est un axe de symétrie, mais ω pourra cependant croître indéfiniment à cause de la forme de la fonction (φ) par rapport à ω.

Ceci posé, faisons croître ω *positivement*, et avec continuité à partir de *zéro;* nous aurons, ρ_1 et ρ_2 étant les deux valeurs de ρ,

$\omega < \frac{a}{r}$	donnent	ρ_1 et ρ_2 *imaginaires.*
. . . .		. . . .
$\omega = \frac{a}{r}$		$\rho_1 = r$ et $\rho_2 = r$; c'est-à-dire le point A' pour A.
$\omega > \frac{a}{r}$		ρ_1 croît et ρ_2 diminue.

Ainsi à partir du point A', on obtient d'une part la partie A'M' s'éloignant de plus en plus du pôle O', et d'autre part A'N'O' s'approchant de plus en plus du même point; et pour

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{a^2 + r^2} \quad \text{on a} \quad \rho_1 = 2r \quad \text{et} \quad \rho_2 = 0;$$

donc la première partie atteint M' pour lequel

$$O'M' = 2r,$$

et l'autre le pôle O' *lui-même.*

Si maintenant ω croît encore, ρ_1 augmente *positivement* et ρ_2 *négatif* croît *numériquement*, ce qui donne M'K'I... pour ρ_1 et O'R'I' pour ρ_2; et

$$\omega = \pi r$$

déterminant

$$\rho_1 = r + \sqrt{\pi^2 r^4 - a^2} \quad \text{et} \quad \rho_2 = r - \sqrt{\pi^2 r^4 - a^2},$$

on en déduit les points

I et I'.

Enfin ω croissant de πr à $2\pi r$, ρ_1 donnera

$$IK''O',$$

et ρ_2

$$O'RI';$$

puis de $\omega = 2\pi r$ jusqu'à $\omega = 2\pi r + \frac{\pi}{2}$, on aura I'C et IT : de $2\pi r + \frac{\pi}{2}$ à $2\pi r + \pi$, les portions IG et I'C' et ainsi de suite.

N. B. La théorie de la tangente en coordonnées polaires donnerait

$$\text{tg. } V = \frac{\rho(\rho - r)}{r^2\omega},$$

et

$$\textit{sous-tangente} = \frac{\rho(\rho - r)}{r^2\omega} \left\{ r \pm \sqrt{r^2\omega^2 - a^2} \right\}.$$

Enfin, remarquons que pour le point A' pour lequel

$$\omega = a : r \quad \text{et} \quad \rho = r$$

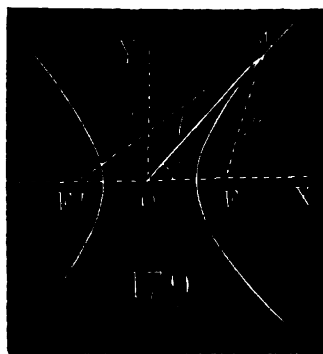
on a

$$\text{tg. } V = 0;$$

c'est-à-dire qu'en A' la tangente à la courbe est le rayon vecteur ρ de ce point.

PROBLÈME VI.

Trouver dans un plan le lieu du point qui reçoit de deux foyers lumineux d'égale intensité, situés dans ce plan, la même quantité totale de lumière que si les deux foyers étaient réunis au milieu de leur distance (fig. 179).



Prenons la droite des foyers FF' pour axe polaire et son milieu O pour pôle, et soit M un point du lieu; nous aurons, λ étant l'intensité des lumières à l'unité de distance,

$$\frac{\lambda}{\delta^2} + \frac{\lambda}{\delta'^2} \quad \text{et} \quad \frac{2\lambda}{\rho^2}$$

pour les quantités de lumière reçues en M par les foyers lumineux F et F' et par réunion en O, δ, δ' et ρ désignant les distances FM, F'M et OM.

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{\lambda}{\delta^2} + \frac{\lambda}{\delta'^2} = \frac{2\lambda}{\rho^2} \quad \text{ou} \quad \rho^2(\delta^2 + \delta'^2) = 2\delta^2\delta'^2 \qquad (1);$$

mais, $2c$ étant la distance des foyers,

$$\delta^2 = \rho^2 + c^2 - 2c\rho\cos.\omega \quad \text{et} \quad \delta'^2 = \rho^2 + c^2 + 2c\rho\cos.\omega,$$

donc (1) se transforme en

$$\rho^2(\rho^2 + c^2) = (\rho^2 + c^2)^2 - 4c^2\rho^2 \cos.\omega\,;$$

et, après réduction,

$$\rho^2(4\cos.^2\omega - 1) = c^2 \qquad (\varphi)$$

sera l'équation polaire du lieu demandé.

N. B. Transformons (φ) en coordonnées rectilignes; il vient

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \cos.^2\omega = \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

d'où

$$y^2 - 3x^2 = -c^2 \qquad (h);$$

c'est-à-dire que (φ) est *une hyperbole dont les asymptotes forment un angle de 60° avec l'axe transverse.*

PROBLÈME VII.

Quel est le lieu décrit par le foyer d'une parabole qui se meut en restant tangente à la droite OX et un même point O (fig. 180)?

Prenons OX pour axe polaire et O pour pôle; nous avons, en projetant le point O sur l'axe variable SK de la parabole,

$$\text{OF} \quad \text{ou} \quad \rho = \text{SP} + \frac{p}{2};$$

mais

$$\text{SP} = \text{SF} - \text{PF} = \frac{p}{2} - \rho\cos.\text{PFO};$$

donc

$$\rho = p - \rho\cos.\text{PFO},$$

ou

$$\rho(1 + \cos.\text{PFO}) = p \qquad (1).$$

Or, si nous traçons le diamètre du point de contact O, nous aurons, par une propriété de la parabole,

$$\text{KOX} = \text{FOX}' \quad \text{d'où} \quad \text{PFO} = \text{FOK} = \omega - \text{FOX}'$$

mais

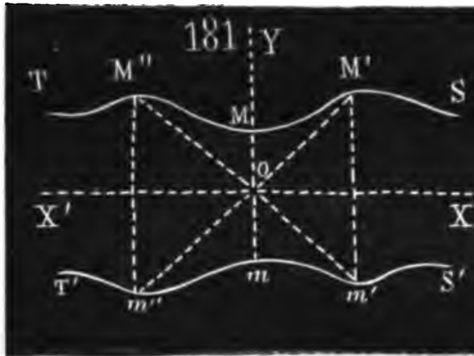
$$\text{FOX}' = 180^\circ - \omega \quad \text{et par suite} \quad \text{PFO} = 2\omega - 180^\circ.$$

ainsi (1) devient

$$\rho(1 - \cos.2\omega) = p,$$

ou

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos.2\omega} \qquad (\varphi).$$



DISCUSSION. Cette fonction (φ) montre déjà que la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire et à sa perpendiculaire menée par le pôle, puisqu'elle ne subit aucune altération en y changeant

$$\omega \text{ en } -\omega \quad \text{et} \quad \omega \text{ en } 180^\circ - \omega;$$

et il est évident que la branche située en dessous de XX' (fig. 181) serait produite par la parabole placée de la même manière par rapport à l'axe polaire.

Ceci posé, faisons croître ω de 0° à 90° : en passant par l'état de 45°.

I. De $\omega = 0^\circ$ à $\omega = 45^\circ$: $\omega = 0^\circ$ donne

$$\rho = \frac{p}{0} = \infty,$$

donc la courbe vient de l'infini en S jusqu'à déterminer un point M' pour lequel

$$\omega = \text{M'OX} = 45^\circ \quad \text{et} \quad \rho = p.$$

II. De $\omega = 45^\circ$ à $\omega = 90^\circ$: ω continuant de croître depuis 45° jusqu'à 90°, ρ décroît jusqu'à

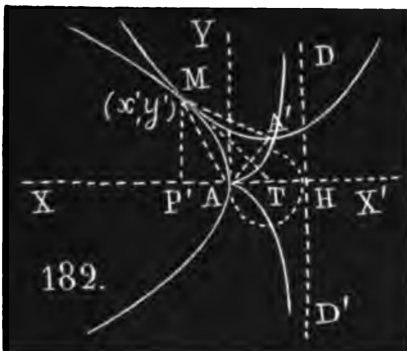
$$\frac{p}{2}$$

ce qui donne le point M qui correspond précisément au moment où le sommet de la parabole est en O; et par suite la portion M'M est tracée.

De $\omega = 90^\circ$ à $\omega = 180^\circ$ on déduirait MM''T ; tandis que de $\omega = 180^\circ$ à $\omega = 360^\circ$, on construirait T'$m''mm'$S' symétrique de SM'MM''T.

PROBLÈME VIII.

Une parabole roule sur une autre parabole fixe identique ; quel est le lieu du sommet A' de la parabole mobile, les sommets des courbes étant en contact à l'origine du roulement (fig. 182).



Soit $\widehat{\text{AM}}$ et $\widehat{\text{A'M}}$ une situation quelconque des deux paraboles égales ; les cordes égales AM et A'M indiquent que les sommets A et A' sont symétriques par rapport à la tangente commune MT : donc, les coordonnées du point A' sont les doubles de celles de la projection du sommet fixe A sur la tangente MT. Or, nous avons trouvé (§ 196. Prob. I) la cis-

soïde

$$y^2 = \frac{(-x)^3}{\frac{p}{2} - (-x)} \qquad (1)$$

pour le lieu de ce point; donc, (X, Y) désignant le point A',

$$X = 2x \quad \text{et} \quad Y = 2y;$$

et (1) se transforme en

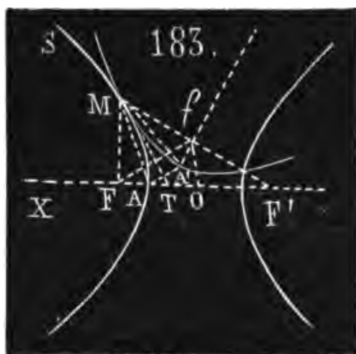
$$Y^2 = \frac{(-X)^3}{p - (-X)} \qquad (\varphi).$$

Ainsi *le lieu est une cissoïde ayant pour asymptote la directrice* DD' *de la parabole fixe.*

N. B. Nous engageons le lecteur à substituer le foyer au sommet, comme point générateur.

PROBLÈME IX.

Trouver le lieu décrit par l'un des foyers d'une hyperbole qui roule sans glissement sur une courbe identique. L'origine du mouvement sera celui du contact des sommets correspondants (fig. 183).



D'abord un point du lieu sera évidemment celui symétrique du foyer F de l'hyperbole fixe par rapport à son sommet A.

Soit maintenant une situation spéciale des deux hyperboles AM et A'M : on a évidemment, à cause de $\widehat{AM} = \widehat{A'M}$,

$$MF = Mf \quad \text{et} \quad MA = MA';$$

de plus, MT est la bissectrice de l'angle FMf et comme

$$MF' - MF = 2a,$$

il vient

$$MF' - Mf = 2a;$$

donc, le foyer de la courbe génératrice est toujours sur le rayon vecteur mené du second foyer F' de l'hyperbole fixe au point de contact M, et de

$$F'f = 2a,$$

on déduirait *que le lieu serait une circonférence ayant* F' *pour centre et* 2a *pour rayon;* d'où

$$\rho = 2a$$

F' étant le pôle.

DISCUSSION. Le roulement sur la branche infinie AMS de l'hyperbole fixe semblait indiquer l'existence d'une courbe illimitée pour le lieu du foyer f, et comme il n'en est pas ainsi, nous devons présumer qu'une portion de la circonférence précédente répond seulement au lieu demandé et que ses extrémités sont des points asymptotiques : aussi déter-

minons le lieu en prenant pour pôle et axe polaire le centre O et l'axe transverse OX de l'hyperbole fixe ; nous avons

$$F'O^2 + Of^2 - 2F'O.\,Of \cos.\,F'Of = F'f^2,$$

ou

$$c^2 + \rho^2 + 2c\rho \cos.\,\omega = 4a^2;$$

et de

$$\rho = -c \cos.\,\omega \pm \sqrt{4a^2 - c^2 \sin.^2 \omega},$$

on déduit que ρ ne sera *réel* que pour

$$c^2 \sin.^2 \omega \overline{\overline{<}}\ 4a^2;$$

donc, en désignant par ω_1 la valeur de ω correspondant à

$$c^2 \sin.^2 \omega = 4a^2,$$

le lieu se composera des deux arcs de la circonférence $F'f = 2a$, qui sont vus du pôle O sous un angle depuis ω_1 jusqu'à $-\omega_1$ et depuis $180^\circ - \omega_1$ jusqu'à $180^\circ + \omega_1$.

N. B. Nous engageons le lecteur à substituer deux paraboles aux deux hyperboles de ce problème.

Exercices.

1° Quel est le lieu décrit par le centre d'une ellipse qui se meut en restant tangente en un même point d'une droite fixe?

2° Trouver l'équation polaire de la section plane d'un cône droit lorsqu'on développe ce cône sur un plan.

3° Une hyperbole et une ellipse ont les mêmes foyers, les cordes interceptées par la première courbe sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse, sont égales.

4° Si deux côtés MP et MQ d'un triangle MPQ inscrit dans une ellipse, passent par les foyers de la courbe, on aura $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'Q} =$ *constante*.

5° Quel est le lieu du sommet d'un angle dont les côtés passent par deux points fixes et qui interceptent une longueur constante sur une droite donnée?

§ XIII.

Application de l'analyse de Descartes à la résolution des équations.

LVIe & LVIIe LEÇON.

SOMMAIRE.

Construction géométrique des expressions algébriques. Exemples. — Application de l'analyse de Descartes à la résolution des équations. — Exercices.

Construction géométrique des expressions algébriques.

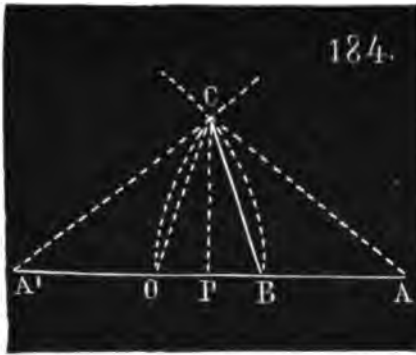
228. Tous les traités de géométrie élémentaire. indiquent le moyen de construire les expressions concrètes et linéaires

$$a:b::c:x,\quad a:b::b:x,\quad a:x::x:b \quad \text{et} \quad x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2};$$

c'est-à-dire une *quatrième*, une *troisième*, une *moyenne proportionnelle* et le côté d'un carré dont la surface doit être équivalente à la somme algébrique de plusieurs carrés donnés.

M. *Gouzy* (de Lausane) a donné une construction très-élégante de la moyenne proportionnelle, la voici (fig. 184) : sur une droite indéfinie et dans le même sens, portons OB $= b$ et OA $= a$, puis, en sens contraire, BA′ $= a$; enfin, de A et A′ comme centres, avec a comme rayon, décrivons deux arcs de cercle se coupant en C, nous aurons

$$\text{CO} = \text{CB} = \sqrt{ab}.$$



En effet, du triangle COA', on déduit

$$CO^2 = A'C^2 + A'O^2 - 2A'O.\,A'P\,;$$

d'où, à cause de $A'O = a - b$, et $A'P = a - \frac{b}{2}$,

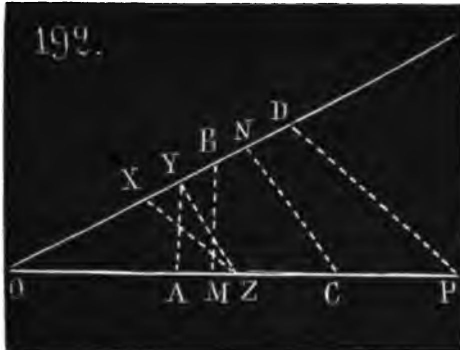
$$CO^2 = a^2 + (a-b)^2 - 2(a-b)\left(a - \frac{b}{2}\right);$$

et par suite, en réduisant,

$$CO^2 = a.b \quad \text{d'où} \quad CO = \sqrt{a.b} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Toutes les expressions linéaires rationnelles *ou* irrationnelles dont les indices sont 2^n se ramènent facilement, au moyen de lignes auxiliaires, aux formes précédentes. Cependant, il arrive souvent que ces auxiliaires n'existent qu'à l'état latent. Voici quelques exemples :

I. *Construire* $x = \frac{abcd\ldots}{mnp\ldots}$ (le numérateur possédant un facteur linéaire de plus que le dénominateur).



Sur les côtés de l'angle quelconque O, portons *alternativement*, à partir de O, les distances (fig. 192)

OA, OB, OC, OD, OM, ON, OP

respectivement égales à

a, b, c, d, m, n, p;

joignons BM, CN, et DP; et à ces droites traçons les parallèles AY, YZ et ZX : OX sera la droite demandée.

En effet, les triangles OBM et OAY, ONC et OYZ, OPD et OZX donnent

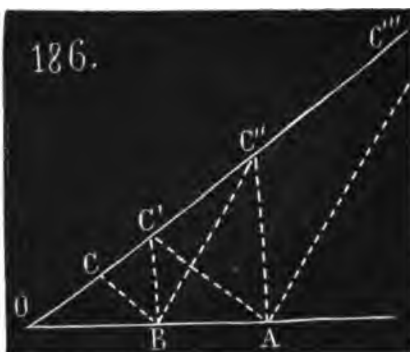
$$\text{OM ou } m : \text{OA ou } a :: \text{OB ou } b : \text{OY} = \frac{ab}{m},$$

$$\text{ON ou } n : \text{OC ou } c :: \text{OY ou } \frac{ab}{m} : \text{OZ} = \frac{abc}{mn},$$

$$\text{OP ou } p : \text{OD ou } d :: \text{OZ ou } \frac{abc}{mn} : \text{OX} = \frac{abcd}{mnp},$$

et ainsi de suite.

II. *Construire* $x = c\left(\frac{a}{b}\right)^n$.



La quatrième proportionnelle $c' = c\left(\frac{a}{b}\right)$ étant d'abord construite, en prenant (fig. 186) sur l'un des côtés de l'angle quelconque O, OA $= a$ et OB $= b$, et sur l'autre côté OC $= c$; puis joignant BC et traçant AC' parallèle à C on aura

$$\text{OB ou } b : \text{OC ou } a :: \text{OC ou } c : \text{OC}' = c.\frac{a}{b}.$$

Ceci posé, menons BC' et sa parallèle AC'' du point A, il vient

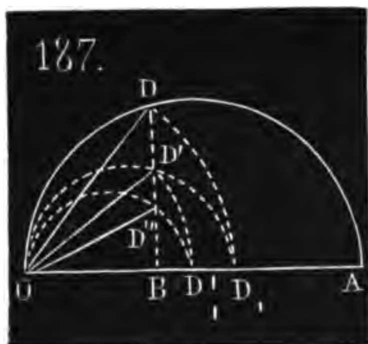
$$\text{OB ou } b : \text{OA ou } a :: \text{OC}' \text{ ou } c\frac{a}{b} : \text{OC}'' = c\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

De même, la droite BC'' et sa parallèle AC''' donneraient

$$\text{OC}''' = c\left(\frac{a}{b}\right)^3;$$

et ainsi de suite.

III. *Construire* $x = c\sqrt[2^n]{\frac{a}{b}}$



Soit d'abord $n = 1$: prenons (fig. 187) OA $= a$, OB $= b$ et sur OA, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence coupant la perpendiculaire BD en D; la corde OD sera

$$\sqrt{ab} \quad \text{ou} \quad b\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ceci posé, rabattons OD en OD_1 et faisons sur OD_1 la même construction que sur OA; nous aurons

$$\text{OD}' = b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

Rabattant encore OD' en OD'_1 et continuant les mêmes constructions, on aura

$$\text{OD}'' = b\sqrt[8]{\frac{a}{b}},$$

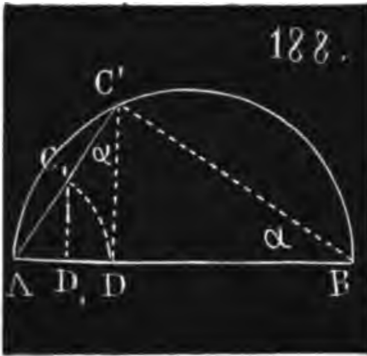
et ainsi de suite.

Maintenant pour construire x, observons que, pour $n = 3$,

$$\frac{x}{\text{OD}''} = \frac{c}{b} \quad \text{ou} \quad b : c :: \text{OD}'' : x;$$

c'est-à-dire une quatrième proportionnelle aux droites b, c et OD″.

IV. *Construire* $x = a \sin.^n \alpha$.



Sur $\text{AB} = a$, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence et inscrivons l'angle $\text{B} = \alpha$; nous aurons (fig. 188)

$$1 : \sin.\alpha :: \text{AB} \quad \text{ou} \quad a : \text{AC}' = a \sin.\alpha.$$

Soit ensuite la perpendiculaire C′D, il vient

$$\text{AD} = \text{AC}' \sin.\alpha = a \sin.^2 \alpha;$$

puis, relevons AD sur AC′ en AC_1 et abaissons C_1D_1 perpendiculaire sur AD, nous obtenons

$$\text{AD}_1 = \text{AC}_1 \sin.\alpha = a \sin.^3 \alpha;$$

et ainsi de suite.

V. *Construire* $x = \dfrac{a}{\sin.^n \alpha}$.



Soit (fig. 189) l'angle $\text{BOA} = 90° - \alpha$, $\text{OA} = a$ et AB perpendiculaire à OA; on a

$$\text{OA} = \text{OB} \cos.\text{O} \quad \text{ou} \quad a = \text{OB} \sin.\alpha,$$

d'où

$$\text{OB} = \frac{a}{\sin.\alpha}.$$

Rabattons OB en OA_1 et menons A_1B_1 perpendiculaire sur OA, il vient

$$\text{OB} = \text{OA}_1 = \text{OB}_1 \cos.\text{O} = \text{OB}_1 \sin.\alpha;$$

donc

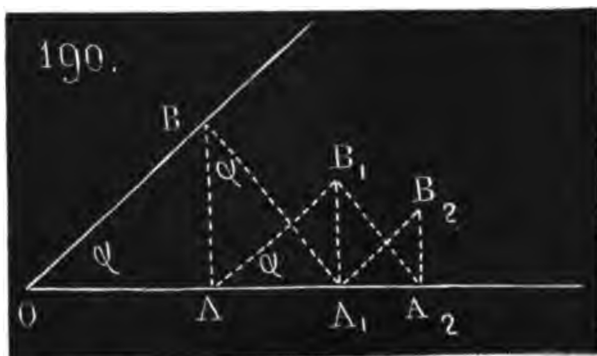
$$\text{OB}_1 = \frac{\text{OB}}{\sin.\alpha} = \frac{a}{\sin.^2 \alpha};$$

et ainsi de suite.

VI. *Construire* $x = a \,\text{tg.}^n \alpha$.

Sur un des côtés de $\text{BOA} = \alpha$, prenons (fig. 190) $\text{OA} = a$ et traçons la perpendiculaire AB; nous avons

$$\text{AB} = \text{OA} \,\text{tg.}\alpha = a \,\text{tg.}^2 \alpha.$$



Puis menons BA_1 perpendiculaire à OB, il est clair que

$$AA_1 = AB\,\text{tg}.\alpha = a\,\text{tg}.^2\alpha.$$

Traçons ensuite AB_1 et A_1B_2, respectivement parallèles à OB et AB, il vient

$$A_1B_1 = AA_1\ \text{tg}.\ \alpha = a\ \text{tg}.^3\ \alpha;$$

et ainsi de suite (*).

VII. *Construire* $\text{tg}.\,x = \dfrac{ab + cd}{ac - bd}$.

On obtient, en divisant haut et bas par ac,

$$\text{tg}.\ x = \frac{\dfrac{b}{c} + \dfrac{d}{a}}{1 - \dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{d}{a}};$$

d'où, en posant $\text{tg}.\,y = \dfrac{b}{c}$ et $\text{tg}.\,z = \dfrac{d}{a}$,

$$\text{tg}.\ x = \frac{\text{tg}.\,y + \text{tg}.\,z}{1 - \text{tg}.\,y\,\text{tg}.\,z} = \text{tg}.\ (y+z);$$

c'est-à-dire que

$$x = y + z \quad \text{et en généralisant} \quad x = k\pi + (y + z)$$

(k étant un nombre entier *positif* ou *négatif*).

VIII. *Construire* $\sin.\,x = \dfrac{\sqrt{a^2 + ab} - \sqrt{a^2 - ab}}{2a}$.

Or, on peut écrire

$$\sin.\ x = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b}{a}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b}{a}};$$

et, comme cette formule exige $b < a$, on peut poser

$$\sin.\ y = \frac{b}{a},$$

(*) Les exemples II, III, IV, V et VI sont extraits de *Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation*, par MM. BABINET et HOUSEL.

d'où

$$\sin. x = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin. y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin. y} = \sin. \tfrac{1}{2} y;$$

c'est-à-dire

$$x = \tfrac{1}{2} y \quad \text{et en généralisant} \quad x = k\pi + \tfrac{1}{2} y.$$

IX. *Construire* $x = \dfrac{cdef + ghik - lmno}{pqr + stu}$.

Cette expression peut s'écrire

$$x = \frac{def\left(c + \dfrac{ghik}{def} - \dfrac{lmno}{def}\right)}{de\left(\dfrac{pqr}{de} + \dfrac{stu}{de}\right)} = \frac{f\left(c + \dfrac{ghik}{def} - \dfrac{lmno}{def}\right)}{\dfrac{pqr}{de} + \dfrac{stu}{de}},$$

ou, en faisant usage de l'exemple I,

$$x = \frac{f(c + \alpha - \beta)}{\gamma + \delta};$$

c'est-à-dire que x s'obtient par une quatrième proportionnelle.

X. *Construire* $x = \sqrt{\dfrac{abcd}{pq}}$.

On a (Exemple I)

$$x = \sqrt{a. \frac{bcd}{pq}} = \sqrt{a\alpha}.$$

XI. *Construire* $x = \sqrt{ab + cd - ef}$.

Ici en posant $\alpha^2 = ab$, $\beta^2 = cd$ et $\gamma^2 = ef$, on obtient

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2};$$

c'est-à-dire que les moyennes proportionnelles entre a et b, c et d, e et f réduisent le problème à un de ceux donnés en géométrie élémentaire.

XII. *Construire* $x = \dfrac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{ab^2 - 2abc + ac^2}$.

Une simple décomposition en facteurs, donne

$$x = \frac{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{a(b - c)^2};$$

et ramène à l'exemple I.

XIII. *Construire* $x = \sqrt[4]{\frac{2a^5 - 4a^4b + 4a^3b^2 - 4a^2b^3 + 2ab^4}{a+b}}$.

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$x = \sqrt{(a-b)\sqrt{(a^2+b^2)\frac{2a}{a+b}}}.$$

Or, $a^2 + b^2$ peut être changé en un carré c^2 et

$$\sqrt{c^2 . \frac{2a}{a+b}}$$

est le côté d'un carré dont la surface est à celle de c^2 comme la ligne $2a$ est à la ligne $a + b$, car on a

$$y^2 : c^2 :: 2a : a + b;$$

donc, d étant le côté de ce carré,

$$x = \sqrt{(a-b)\,d},$$

ou une moyenne proportionnelle entre $a - b$ et d.

REMARQUE. Les exemples précédents pourraient être plus nombreux, mais ils suffisent pour montrer au lecteur que cela revient à des opérations identiques à celles qui ont pour but de rendre une expression calculable par logarithmes ; et nous ne nous sommes occupés que de radicaux dont l'indice est de la forme 2^n : nous verrons bientôt le pourquoi de cette restriction (§ 226. REMARQUE).

Enfin, ce qui précède n'était point indispensable à ces leçons et ne doit être regardé que comme prolégomènes utiles, mais non nécessaires.

Application de l'analyse de Descartes à la résolution des équations.

226. L'analyse de Descartes se prête merveilleusement à la détermination géométrique des racines d'une équation donnée, sauf toutefois la difficulté inhérente à la construction des courbes.

En effet, soit

$$f(x) = 0 \qquad (1);$$

en posant

$$y = f(x) \qquad (f),$$

il est évident que les abscisses à l'origine du lieu (f) seront les racines de (1).

Si dans (1) on transpose une certaine partie des termes et que par suite on lui donne la forme

$$F(x) = F_1(x),$$

les intersections des lieux

$$y = F(x) \quad \text{et} \quad y = F_1(x)$$

auront encore pour abscisses les racines de (1).

Donc, en général, tout système de deux fonctions de x et de y qui donnera (1) pour résultat de l'élimination de y, caractérisera deux lieux géométriques dont les X des points de rencontre seront les solutions de (1).

REMARQUE. Dans la construction des racines de $f(x) = 0$, au moyen de lieux géométriques, il faut tenir moins à simplifier le tracé effectif qu'à rendre sa conception plus directe et plus spontanée. Ainsi le meilleur mode consiste en une droite avec la courbe correspondant à l'équation $f(x) = 0$, mais ce mode devra être écarté toutes les fois qu'il y aura lieu d'utiliser une figure déjà tracée, alors on préfère compliquer une des lignes pour simplifier l'autre.

Pour les équations algébriques, le produit des degrés des deux lignes doit être égal au degré de $f(x) = 0$. Ainsi le troisième et le quatrième ne peut être construit par une droite et un cercle, ni par le mode de deux cercles qui se réduit à une droite *(Axe radical)*; aussi prend-on deux sections coniques dont l'une *seulement* est circulaire.

Enfin les radicaux dont l'indice n'est point de la forme 2^n (n *étant entier*) ne peuvent être construits par la droite et le cercle. En effet, si cette construction était possible, en exprimant le résultat géométrique au moyen de l'analyse on obtiendrait indubitablement un radical de la forme $\sqrt[2^n]{}$; c'est-à-dire une absurdité.

227. Voici du reste quelques problèmes qui faciliteront la compréhension de l'esprit de cette théorie.

PROBLÈME I.

Construire les racines de l'équation du second degré.

1re FORME : $ax^2 + bx + c = 0$.

Posant, en considérant des coordonnées restangulaires,

$$y^2 + \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

nous en déduisons que les racines sont les abscisses à l'origine de la circonférence précédente.

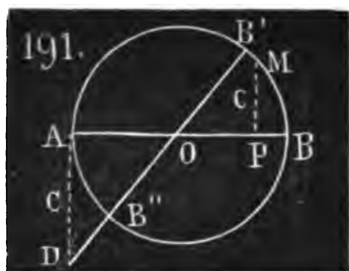
2e FORME : $x^2 + px + q = 0$ ou (en rétablissant l'homogénéité et séparant les cas particuliers des signes explicites de p et q)

$$x^2 - px = -c^2 \quad (1),$$
$$x^2 + px = -c^2 \quad (1');$$
$$x^2 - px = +c^2 \quad (2),$$
$$x^2 + px = +c^2 \quad (2').$$

Ainsi tout se réduit à construire (1) et (2), et à prendre leurs solutions en signes contraires pour obtenir celles de (1') et (2').

Or, (1) peut s'écrire

$$x(p - x) = c^2;$$



c'est-à-dire que x et $p - x$ sont les côtés du rectangle ayant c^2 pour surface. Donc, en décrivant sur $AB = p$, comme diamètre, une circonférence et déterminant une ordonnée

$$MP = c;$$

AP et PB seront les racines cherchées : car

$$AP.PB = MP^2 \quad \text{peut s'écrire} \quad \begin{cases} AP(p - AP) = c^2, \\ PB(p - PB) = c^2; \end{cases}$$

d'où, en comparant avec (1),

$$AP = x \quad \text{et} \quad PB = x.$$

N. B. L'équation (1') aura donc pour solution

$$x = -AP \quad \text{et} \quad x = -PB.$$

Quant à la forme (2) ou

$$x(x - p) = c^2,$$

les deux côtés du rectangle ayant p pour différence, cela revient à mener une tangente $AD = c$ au cercle précédent, et à tracer la sécante diamétrale DOB'. En effet,

$$DB'.DB'' = AD^2 \quad \text{s'écrit} \quad \begin{cases} DB'(DB' - p) = c^2, \\ -DB''(-DB'' - p) = c^2; \end{cases}$$

d'où

$$x = DB' \quad \text{et} \quad x = -DB''.$$

N. B. (2') aura donc pour racines

$$x = -DB' \quad \text{et} \quad x = DB''.$$

PROBLÈME II.

Déterminer géométriquement les racines de l'équation du 4me degré.

L'équation proposée est

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0;$$

mais comme en posant (*)

$$x = x' - \frac{A}{4}$$

le terme en x^3 disparaît, nous pouvons la considérer sous la forme

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1).$$

Or, en considérant la parabole

$$x^2 = y \qquad (P),$$

(1) donne la courbe du même genre

$$y^2 + ay + bx + c = 0 \qquad (P');$$

et par suite les abscisses des points communs à (P) et (P') seront les racines de (1).

Mais (P) et (P') donnant, par voie d'addition,

$$x^2 + y^2 + bx + (a-1)y + c = 0,$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a-1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (a-1)^2}{4} - c \qquad (\varphi);$$

on reconnaît que la solution est encore donnée par la parabole (P) et la circonférence (φ).

SCOLIE. L'équation du 3e degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (2),$$

peut s'écrire

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0;$$

donc sa résolution géométrique revient à celle du 4e degré, sauf toutefois à négliger la solution étrangère

$$x = 0,$$

donnée par l'origine.

N. B. Cette méthode de solution pour (1) et (2), est due au célèbre Halley.

(*) L'analyse algébrique établit le théorème suivant : *Toute équation de la forme*

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots = 0$$

est privée du second terme en posant

$$x = x' - \frac{p}{m}.$$

PROBLÈME III.

Quelle hauteur faut-il donner à un segment sphérique à une base pour que son volume soit le quart de celui de la sphère?

Soit x la hauteur cherchée, R étant le rayon et la sphère, nous avons

$$\pi x^2 (R - \tfrac{1}{3} x)$$

pour le segment demandé; et par suite

$$\tfrac{1}{3} \pi R^3 = \pi x^2 (R - \tfrac{1}{3} x) \quad \text{ou} \quad x^3 - 3Rx^2 + R^3 = 0.$$

Or

$$x = x' + R,$$

donne

$$x'^3 - 3R^2x' - R^3 = 0;$$

et, en posant $R = 1$,

$$x'^3 - 3x' - 1 = 0,$$

sera l'équation du problème.

Multiplions d'abord par x', il vient

$$x'^4 - 3x'^2 - x' = 0;$$

puis posant la parabole

$$y = x'^2 \qquad (P),$$

on en déduit une seconde parabole

$$y^2 - 3y - x' = 0 \qquad (P')$$

qui, combinée avec la précédente, donne le cercle

$$x'^2 + y^2 - x' - 4y = 0 \quad \text{ou} \quad (x' - \tfrac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{17}{4} \qquad (\varphi).$$

Les lieux (P) et (φ) donnent x', et par suite

$$x = x' + 1;$$

puisque R a été pris pour unité.

N. B. La hauteur x doit évidemment être moindre que le rayon, donc le lecteur devra rejeter pour x' toute valeur positive *ou* qui étant négative serait *numériquement* supérieure à l'unité.

PROBLÈME IV.

Insérer deux moyennes proportionnelles entre a *et* b.

Ainsi on doit avoir

$$∺ a : x : y : b \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{matrix} a : x :: x : y \\ x : y :: y : b \end{matrix} \right\};$$

c'est-à-dire

$$\text{P)} \qquad x^2 = ay \quad \text{et} \quad y^2 = bx \ldots \qquad \text{(P'.}$$

Donc, x et y sont les coordonnées du point d'intersection des paraboles (P) et (P'), en omettant toutefois l'origine (SOLUTION DE MENECHME).

En combinant (P) et (P') par voie de multiplication, on obtient l'hyperbole

$$xy = ab \qquad \text{(H)},$$

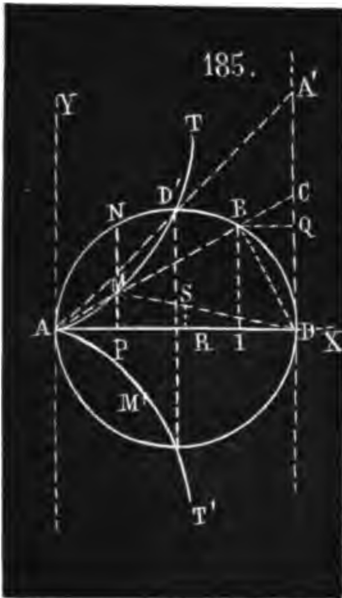
qui résoudra le problème en y adjoignant une des paraboles (P) ou (P').

Enfin, (P) + (P') donne la circonférence

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \qquad (\varphi)$$

qui pourra être substituée à l'une des deux paraboles (P) et (P').

SOLUTION DE DIOCLÈS (§ 216, *Prob. IV*). Considérons une cissoïde (fig. 185) TMAT', AD étant le diamètre de son cercle générateur : sur DA, prenons



$$DR = a$$

et, perpendiculairement à AD,

$$RS = b;$$

la droite DS détermine un point M sur la cissoïde, pour lequel

$$DP : PM :: a : b \qquad (1).$$

Or, nous avons, en traçant la sécante AMBC,

$$AI : IB :: IB : ID \quad \text{et} \quad DQ : BQ :: BQ : QC;$$

et, à cause des lignes égales données par la définition *usuelle* (§ 208, *Prob. IV*) de la courbe,

$$DP : PN :: PN : AP \quad \text{et} \quad PN : AP :: AP : PM;$$

donc

$$\div\!\!\div DP : PN : AP : PM;$$

et par suite, en multipliant les quatre termes par le rapport b : PM,

$$\div\!\!\div \frac{DP.b}{PM} : \frac{PN.b}{PM} : \frac{AP.b}{PM} : b,$$

ou, à cause de (1),

$$\div\!\div\ a : \frac{\mathrm{PN}.b}{\mathrm{PM}} : \frac{\mathrm{AP}.b}{\mathrm{PM}} : b;$$

c'est-à-dire que x et y sont les quatrièmes proportionnelles données par

$$\mathrm{PM} : \mathrm{PN} :: b : x \quad \text{et} \quad \mathrm{PM} : \mathrm{AP} :: b : y.$$

PROBLÈME V.

Déterminer un cube double d'un cube donné.

Ce problème, célèbre dans l'histoire des sciences, date du temps de Platon et se rattache d'ailleurs aux premiers développements de l'esprit scientifique : *Hypocrate de Chio* le réduisit à la recherche de deux moyennes proportionnelles entre deux nombres; *Platon*, *Architus*, *Eudoxe*, *Ménechme*, *Aristée* et *Dinostrate* s'en occupèrent successivement et leurs solutions furent plus ou moins élégantes; mais c'est à *Dioclès* qu'était réservé l'honneur de trouver une méthode éminemment simple, et cela au moyen de *sa cissoïde*.

Du reste, ces recherches, puériles quant au point de vue de l'origine de la question, ont donné naissance à d'importantes découvertes, et c'est sous ce rapport qu'elles intéressent vivement l'histoire des mathématiques.

Soit x le côté du cube double de celui a^3 donné, nous devons avoir

$$x^3 = 2a^3;$$

et comme cette équation résulte de l'élimination de y de la progression

$$\div\!\div\ a : x : y : 2a,$$

nous reconnaissons immédiatement que ce problème revient au précédent.

PROBLÈME VI.

Diviser un angle en trois parties égales.

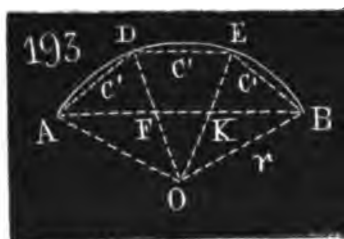
Soit α l'angle donné, nous avons

$$4 \cos.^3 \tfrac{1}{3}\alpha - 3 \cos. \tfrac{1}{3}\alpha - \cos. \alpha = 0,$$

d'où, en posant $\cos. \frac{1}{3}\alpha = x$ et divisant par 4,

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}\cos. \alpha = 0 \qquad (1);$$

c'est-à-dire que cette question se rapporte à la scolie du problème II.



Solution géométrique. Prenons pour inconnue la corde c' du tiers de l'arc ADEB (fig. 193) sous-tendu par la corde AB $= c$, et appelons r le rayon OA.

La droite DE parallèle à AB donne

$$\widehat{AFD} = \widehat{FDE} = \widehat{ADF};$$

donc, le triangle ADF est isocèle et on a

$$c' = AD = AF = BK,$$

d'où

$$2c' + FK = c \qquad (2).$$

Mais les triangles semblables AFD et AOD donnent

$$OA : AF :: AD : DF \quad \text{ou} \quad r : c' :: c' : DF;$$

et de

$$DF = \frac{c'^2}{r} \quad \text{on déduit} \quad OF = r - \frac{c'^2}{r} = \frac{r^2 - c'^2}{r}.$$

D'un autre côté OFK et ODE fournissent

$$OD : OF :: DE : FK \quad \text{ou} \quad r : \frac{r^2 - c'^2}{r} :: c' : FK,$$

d'où

$$FK = \frac{c'(r^2 - c'^2)}{r^2};$$

et par suite (2) devient

$$2c' + \frac{c'(r^2 - c'^2)}{r^2} = c$$

donc

$$c'^3 - 3r^2c' + cr^2 = 0;$$

c'est-à-dire une équation du troisième degré analogue à celle que l'on déduit de la trigonométrie.

N. B. Nous avons vu en trigonométrie que les trois racines de (1) sont toujours réelles; donc, ces trois cosinus détermineront les extrémités de trois arcs, parmi lesquelles il faudra choisir, par une judicieuse discussion, celle du problème.

Détermination approximative des racines d'une équation.

228. Supposons que la courbe

$$y = f(x),$$

dont les abcisses à l'origine satisfont à

$$f(x) = 0,$$

ait été construite; et que (x_1, y_1) soient les coordonnées d'un de ses points déter-

minés graphiquement : x_1 ne sera pas la valeur exacte de x, mais il en sera très-voisin; et on pourra, dans l'intervalle, substituer à la courbe sa tangente au point (x_1, y_1). Cette droite est

$$y - y_1 = f'_{x_1}(x - x_1).$$

Or, $y = 0$ donnant

$$x = x_1 - \frac{y'}{f'_{x_1}} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'_{x_1}} = x_2,$$

on en déduit une valeur x_2 plus approchée de x que la précédente x_1.

On obtiendrait de même

$$x = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'_{x_2}} = x_3,$$

$$x = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'_{x_3}} = x_4,$$

. . . .

Maintenant si x_n est une valeur approximative trouvée pour x et que δ soit la limite admise pour l'erreur; on calculera les deux expressions

$$f(x_n - \delta) \quad \text{et} \quad f(x_n + \delta),$$

et si elles sont de signes contraires, x_n sera bon; car alors la courbe est au-dessous de X avant l'intersection et au-dessus après.

N. B. Le lecteur qui s'est déjà occupé de la résolution numérique des équations doit avoir reconnu la méthode d'approximation de NEWTON.

229. REMARQUE. Il résulte de l'ensemble des leçons précédentes, complété, il est vrai, par l'étude de l'analyse de Descartes appliquée aux trois dimensions, que MONGE avait raison de dire : IL N'Y A AUCUNE CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE QUI NE PUISSE ÊTRE TRADUITE EN ANALYSE, ET LORSQUE LES QUESTIONS NE COMPORTENT PAS PLUS DE TROIS INCONNUES, CHAQUE OPÉRATION ANALYTIQUE PEUT ÊTRE REGARDÉE COMME L'ÉCRITURE D'UN SPECTACLE EN GÉOMÉTRIE.

Exercices.

1° Construire $x = \sqrt{\dfrac{a^5 - 4a^2b^3 + bc^4}{2a^3 + 3bc^2}}$.

2° Construire $x = \sqrt{\dfrac{a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4}{a^2 + 2ab}}$.

3° Résoudre $x^3 - 2x - 5 = 0$ pour la valeur de x comprise entre 2 et 3, avec une approximation moindre que 0, 01.

4° Résoudre $70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 = 0$ pour la racine comprise entre 0,06 et 0, 07, avec six décimales.

5° Construire les racines de $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 8 = 0$.

§ XIV.

Analyse des conditions déterminant une ligne.

LVIIIe, LIXe & LXe LEÇON.

SOMMAIRE.

Analyse des conditions déterminant une ligne. — Théorèmes sur la forme de l'équation d'une courbe assujettie à certaines conditions. — Applications. — Exercices.

230. Ces dernières leçons ont surtout pour but d'analyser les conditions qui déterminent une courbe d'espèce donnée, et spécialement du second degré; mais elles offriront au lecteur un résumé rapide des théories générales que contient l'ensemble de ce travail et une nouvelle étude sur la forme des fonctions caractérisant des lieux assujettis à certaines exigences.

Théorème.

Toute courbe algébrique du degré m, *exige, en général,* $\frac{m(m+3)}{2}$ *conditions.*

En effet, la forme des équations algébriques du degré m, est

$$Ay^m + (Bx + B')y^{m-1} + (Cx^2 + C'x + C'')y^{m-2} + . + (ax^m + bx^{m-1} + . + s) = 0;$$

c'est-à-dire qu'elle contient un nombre de termes indiqué par la somme

$$1 + 2 + 3 + \dots + (m+1) \quad \text{ou} \quad \frac{(m+2)(m+1)}{2}.$$

Or, en substituant aux constantes A, B, B', C, C', C'', ... leurs rapports à l'une d'entre elles, il ne reste plus que

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}-1 \quad \text{ou} \quad \frac{m(m+3)}{2}$$

rapports inconnus. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. Si le lieu est du *second*, du *troisième*, ... degré, il faudra donc *cinq*, *neuf*, (*) ... conditions.

REMARQUE. L'appréciation du théorème précédent exige impérieusement de ne point confondre l'équation la plus générale d'une espèce particulière de courbe avec l'équation complète du degré correspondant. En effet, les constantes contenues dans l'équation d'une ligne peuvent être plus nombreuses que les termes distincts qui les contiennent, il faut donc savoir distinguer entre le nombre de termes distincts et celui des constantes; ce dénombrement étant effectué, le moindre nombre sera celui des conditions nécessaires et suffisantes. La distinction précédente est quelquefois impossible sous le point de vue analytique et quoiqu'au premier abord la conception géométrique d'un lieu puisse aider à cette distinction (chaque point fixe introduira certainement, par ses coordonnées, DEUX CONSTANTES ARBITRAIRES dans l'équation la plus générale; il en sera de même pour une droite fixe; chaque cercle entièrement donné en fera naître TROIS; chaque longueur *ou* chaque angle UNE; etc.,), cependant elle offre au fond, la même chance d'erreur que la méthode analytique.

Quoiqu'il en soit, si on possède l'équation d'une ligne spéciale en coordonnées rectilignes, toujours supposables rectangulaires, on obtient sa relation la plus générale par une simple transformation d'axes coordonnés et comme ce changement s'effectue en remplaçant x et y respectivement par (§ 8)

$$a+x'\cos.(X_1 X)-y'\sin.(X_1 X) \quad \text{et} \quad b+x'\sin.(X_1 X)+y'\cos.(X_1 X),$$

on reconnaît que *le nombre primitif des constantes n'est augmenté que de* TROIS.

Ainsi quel que soit le nombre de constantes contenues dans l'équation spéciale d'une ligne, CE NOMBRE AUGMENTÉ DE TROIS, sera une limite supérieure des conditions nécessaires à la détermination de ce lieu. Donc, la Cissoïde exigera *quatre* conditions; l'Ellipse et l'Hyperbole *cinq*; $y^m = ax^n$, *quatre*; $y = ax^n + b$, $y = ba^x$, et $y = a\sin.bx$, *cinq*; ... et ainsi de suite.

(*) Dans ses essais analytiques sur les courbes du 3me ordre, Mr F. DAGOREAU ayant démontré que l'équation générale de ces lignes peut être privée du terme en x^3 ou en y^3, sans cesser d'être générale, il en résulte que *huit* conditions sont seulement nécessaires pour tous ces lieux géométriques; c'est là une anomalie digne d'être remarquée, et il est probable qu'il en existe de semblables par les autres ordres.

Le travail de Mr DAGOREAU est remarquable sous le double point de vue de la simplicité des calculs et de l'étude logique des courbes, EULER et NEWTON avaient déjà traité le même sujet.

231. Afin de compléter la théorie précédente, nous allons passer en revue les relations données par des conditions géométriques auxquelles un lieu serait assujetti et quoique nous ayons principalement en vue les courbes du second ordre, le lecteur généralisera facilement les notions suivantes.

Théorème I.

Si une courbe doit passer par un point, on obtient une relation entre les constantes de son équation ou *une constante inconnue pourra disparaître.*

En effet, soit

$$f(x, y, a, b, c, d, \dots) = 0 \qquad (1)$$

l'équation du lieu ; nous aurons, le point (x', y') étant sur la courbe,

$$f(x', y', a, b, c, d, \dots) = 0 \qquad (2) ;$$

ou, en éliminant une des constantes $a, b, c, \dots$ entre (1) et (2), a par exemple,

$$F(x, y, x', y', b, c, d, \dots) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. Il pourrait arriver que plus d'une constante disparut par cette élimination, cela tiendrait évidemment à ce que tous les termes ne seraient point distincts *ou* que le point $(x' y')$ serait un point spécial (§ 232) jouissant, par rapport à la courbe, d'une propriété d'ailleurs quelconque, mais autre que celle d'appartenir simplement à l'arc de la courbe.

Corollaire 1. *Si une courbe passe par un point, son équation est de la forme*

$$f(x, y, a, b, c, \dots) - f(x', y', a, b, c, \dots) = 0.$$

En effet, cette relation s'obtient en combinant (1) et (2) par voie de soustraction.

N. B. En considérant spécialement les courbes du second degré,

$$Ay^2 + 2Bxy + 2Dy + (x - d)(x - d') = 0$$

sera la forme de leur équation, le point $(d, 0)$ *ou* $(d', 0)$ donné étant sur l'axe des X.

Corollaire II. *L'équation générale des courbes du second ordre passant par quatre points, dont trois ne sont pas en ligne droite, est de la forme*

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right) + \lambda xy = 0 \qquad (\varphi).$$

En effet, si nous prenons pour axes coordonnés les côtés de l'angle passant par les quatre points donnés, ceux-ci seront $(a, 0)$, $(a', 0)$, $(0, b)$ et $(0, b')$ et

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = 0$$

seront les droites des points $(a, 0)$, $(0, b)$ et $(a', 0)$, $(0, b')$. Or, en posant $x = 0$, on obtient successivement et simultanément

$$y = b, = b' \quad \text{et} \quad x = a, = a'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. $y-ax-b=0$, $y-a'x-b'=0$, $y-cx-d=0$ et $y-c'x-d'=0$ étant les équations de quatre droites passant par les points pris deux à deux,

$$(y-ax-b)(y-a'x-b') + \lambda(y-cx-d)(y-c'x-d') = 0$$

serait encore l'équation de la courbe du second ordre.

Puis,

$$f(x, y) + \lambda(y - ax - b)(y - Ax - B) = 0$$

serait évidemment la courbe passant par les points d'intersection de

$$f(x, y) = 0 \quad \text{avec la droite} \quad y = ax + b.$$

De même, λ, μ et ν étant des constantes indéterminées,

$$\lambda(y-ax-b)(y-a'x-b')+\mu(y-ax-b)(y-a''x-b'')+\nu(y-a'x-b')(y-a''x-b'')=0$$

serait la courbe du second ordre passant par les sommets du triangle dont les côtés seraient

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b' \quad \text{et} \quad y = a''x + b''.$$

Enfin, on aurait

$$f(x, y) + (y - ax - b)[\lambda(x - \alpha) + \lambda'(y - \beta)] = 0$$

pour la courbe passant par le point (α, β) et les intersections de

$$f(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad y = ax + b.$$

Théorème II.

Deux lignes tangentes déterminent une relation entre les constantes de leurs équations.

En effet, en éliminant une des variables entre leurs équations

$$F(x, y, A, B, C, \ldots) = 0, \quad f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0$$

on devra obtenir pour l'autre au moins deux valeurs égales, c'est-à-dire une relation entre A, B, C,... et a, b, c,...

Corollaire I. *Si le point de tangence est donné, on aura deux relations.*

N. B. Il peut également arriver que le point de tangence, jouissant d'autres propriétés, détermine d'autres conditions.

COROLLAIRE II. *L'équation générale des courbes du second degré tangente à la droite* y = ax + b *est de la forme*

$$\lambda\,(y - ax - b) + (Ay + Bx + C)^2 = 0 \qquad (\varphi).$$

En effet, en posant

$$y = a\,x + b,$$

on obtient, pour les points d'intersection avec (φ),

$$Ay + Bx + C = 0\,;$$

c'est-à-dire *une solution unique et double.* C. Q. F. D.

N. B. Si le point de contact (x', y') est donné, (φ) sera aussi

$$\lambda\,[y - y' - a(x - x')] + [A(y + y') + B(x + x') + 2C]\,[A(y - y') + B(x - x')] = 0.$$

COROLLAIRE III. Nous avons trouvé (§ 35)

$$Ay^2 + 2Bxy + Ax^2 + 2\sqrt{AF}\,y + 2\sqrt{AF}\,x + F = 0$$

pour les courbes du second ordre rapportées à deux tangentes égales.

N. B. Si les points de contact étaient donnés sur les axes, on aurait *(Théor. I, Corol. II)*

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 + \lambda xy = 0.$$

THÉORÈME III.

Une asymptote rectiligne donne deux relations.

En effet, en éliminant y entre l'asymptote

$$y = \alpha x + \beta \quad \text{et la courbe} \quad f(x, y) = 0,$$

on devra obtenir pour x des valeurs égales à l'infini, ce qui exige que les coefficients des deux plus hautes puissances de x de l'équation finale, soient *nuls*.

COROLLAIRE. *L'équation générale des courbes du second ordre admettant* $y = ax + b$ ou $y = a'x + b'$ *pour asymptote*, ou *toutes les deux, sera*, λ *étant une constante indéterminée*,

$$(y - ax - b)\,(y - a'x - b') + \lambda = 0.$$

En effet, $y = ax + b$ ou $y = a'x + b'$, ou toutes les deux donnent l'incompatibilité

$$\lambda = 0\,;$$

c'est-à-dire que *une*, au moins, des variables est de la forme $\dfrac{A}{0}$.

THÉORÈME IV.

Tout diamètre donné implique une condition.

Désignons par m la direction inconnue de la corde conjuguée du diamètre donné $y = ax + b$, nous aurons (§ 47), en considérant spécialement les lignes du second ordre,

$$(Am + B)\,y + (Bm + C)\,x + (Dm + E) = 0$$

pour le diamètre correspondant; d'où

$$(1) \quad -\frac{Bm + C}{Am + B} = a \quad \text{et} \quad -\frac{Dm + E}{Am + B} = b \quad (2);$$

et par suite, en éliminant m entre ces équations,

$$(B^2 - AC)\,b - (BD - AE)\,a + (BE - CD) = 0$$

pour la relation cherchée.

COROLLAIRE. *Un axe donne deux relations.* Car, les axes coordonnés pouvant toujours être supposés rectangulaires, il faut adjoindre la condition

$$m = -\frac{1}{a}, \ \text{d'où, pour (1) et (2),} \ \left\{ \begin{array}{l} Ba^2 + (A - C)\,a - B = 0, \\ Bab + Ab - Ea - D = 0; \end{array} \right.$$

c'est-à-dire deux conditions.

N. B. Le lecteur constatera facilement [(1) et (2)] qu'un diamètre et sa corde donnent deux relations et qu'un système de diamètres conjugués équivaut à trois conditions.

SCOLIE. Les équations (1) et (2) indiquent respectivement que *les directions d'un diamètre et de sa corde conjuguée*, *la direction d'une corde et l'ordonnée à l'origine de son diamètre*, impliquent une seule relation.

THÉORÈME V.

La connaissance d'un sommet équivaut à deux relations entre les constantes de l'équation de la ligne.

En effet, (x', y') étant les coordonnées de ce sommet, on a d'abord

$$f(x', y') = 0 \qquad (1).$$

D'un autre côté, le diamètre du point (x', y') étant perpendiculaire à la tangente en ce point, on doit avoir, puisque les coordonnées peuvent être supposées rec-

tangulaires,

$$-\frac{B\left\{-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}\right\}+C}{A\left\{-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}\right\}+B}=\frac{f'_{y'}}{f'_{x'}} \qquad (2);$$

car $-f'_{x'} : f'_{y'}$ est la direction de la tangente et de la corde conjuguée du diamètre passant par le sommet.

Les relations (1) et (2) sont celles demandées.

THÉORÈME VI.

Toute courbe admettant un centre donné, est assujettie à deux conditions.

En effet, (α, β) étant les coordonnées du centre, les équations du centre (§ 59)

$$f'_x = 0 \quad \text{et} \quad f'_y = 0$$

doivent être vérifiées par

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta;$$

c'est-à-dire qu'on obtient deux équations entre les constantes du lieu.

N. B. Si le centre était sur la courbe, comme cela pourrait avoir lieu pour des lignes d'un ordre supérieur au second, cela impliquerait une troisième relation; si ce centre était un sommet, on aurait encore une nouvelle condition, et ainsi de suite.

COROLLAIRE. *L'équation générale des courbes du second ordre, admettant* (α, β) *pour centre, est de la forme*

$$A(y-\beta)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(x-\alpha)^2 + F = 0.$$

En effet, les dérivées de cette fonction *ou*

$$A(y-\beta) + B(x-\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad B(y-\beta) + C(x-\alpha) = 0$$

sont satisfaites par

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta.$$

N. B. En général, toute courbe algébrique caractérisée par

$$F(x).(y-\beta)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + F_1(y).(x-\alpha)^2 + F = 0$$

admet (α, β) pour centre; car

$$2F(x).(y-\beta) + 2B(x-\alpha) + F_1'(y).(x-\alpha)^2 = 0$$
$$F'(x)(y-\beta)^2 + 2B(y-\beta) + 2F_1(y).(x-\alpha) = 0$$

sont vérifiées par $x = \alpha$ et $y = \beta$; toutefois lorsque l'on a point

$$F'(\alpha) = \infty \quad et \quad F_1'(\beta) = 0.$$

N. B. Nous avons déjà exposé, dans la leçon XVI, quel était le nombre de conditions donné par la connaissance d'un foyer, d'une directrice, etc., pour une courbe du second ordre.

232. Remarque. Afin de compléter la théorie précédente, il nous resterait à traiter des points dits *singuliers*, c'est-à-dire de points distincts des autres par une propriété précise, d'ailleurs quelconque, à laquelle on doit avoir égard, tels étaient *le centre, les foyers* et *les points conjugués* ou n'appartenant pas à l'arc de la courbe, quoique vérifiant l'équation de cette dernière; mais on considère encore des points *de rebroussement, d'inflexion,* etc. Il est évident que chaque point de ce genre devra toujours compter pour deux points ordinaires, comme donnant lieu à deux relations de conditions l'une, s'il est sur la courbe,

$$f(x', y', a, b, c, d, \ldots) = 0 \qquad (1);$$

et l'autre

$$F(x', y', a, b, c, d, \ldots) = 0 \qquad (2)$$

qui formule sa propriété caractéristique; si le point singulier n'était point sur la courbe, il est facile de concevoir que, par cela même qu'il est unique, ses coordonnées (α, β) doivent être une fonction déterminée des constantes de $f(x, y, a,b,c,d, \ldots) = 0$, et par suite on aura deux relations

$$\alpha = \varphi(a, b, c, d, \ldots) = 0, \quad \beta = \psi(a, b, c, d, \ldots) = 0$$

dont la forme sera, pour chaque cas, dépendante de l'équation de la courbe et du caractère du point; et ces deux fonctions, comme les deux précédentes (1) et (2), concourreront à déterminer les constantes $a, b, c, d, \ldots..$

Mais la théorie complète des points singuliers ressortissant de la haute analyse, nous ne pouvions que faire une excursion sur cette matière, pour rester dans les limites imposées à ces leçons.

233. Afin de familiariser le lecteur avec les notions précédentes, nous allons développer quelques applications :

Problème I.

Par cinq points donnés, on peut faire passer une courbe du second degré et on n'en peut faire passer qu'une.

Si les axes sont disposés arbitrairement par rapport aux quatre points (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), $(x^{\text{IV}}, y^{\text{IV}})$ et $(x^{\text{V}}, y^{\text{V}})$, nous aurons (§ 231, *Théor. I*, *Corol. II*), pour la courbe passant par les quatre premiers et λ étant une indéterminée,

$$\left.\begin{array}{l} \left\{y - y' - \dfrac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')\right\}\left\{y - y' - \dfrac{y'-y'''}{x'-x'''}(x-x')\right\} \\ + \lambda\left\{y - y' - \dfrac{y'-y^{\text{IV}}}{x'-x^{\text{IV}}}(x-x')\right\}\left\{y - y'' - \dfrac{y''-y^{\text{IV}}}{x''-x^{\text{IV}}}(x-x'')\right\} \end{array}\right\} = 0 \qquad (1;$$

mais le point (x^{v}, y^{v}) étant situé sur (1), on a

$$\left.\begin{array}{l}\left\{y^{v}-y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}(x^{v}-x')\right\}\left\{y^{v}-y'-\frac{y'-y'''}{x'-x'''}(x^{v}-x')\right\}\\ +\lambda\left\{y^{v}-y'-\frac{y'-y^{iv}}{x'-x^{iv}}(x^{v}-x')\right\}\left\{y^{v}-y''-\frac{y''-y^{iv}}{x''-x^{iv}}(x^{v}-x'')\right\}\end{array}\right\}=0 \quad (2.$$

Donc, en éliminant λ entre (1) et (2) on obtiendra le lieu demandé, lequel sera évidemment unique, puisque λ n'aura qu'une seule valeur.

La méthode précédente donne une fonction évidemment complexe et cela tient à la position des axes, car si nous prenons les axes tels que $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(0, y_3)$, $(0, y_4)$ et (x_5, y_5) soient les points, c'est-à-dire des droites passant chacune par deux de ces points; nous aurons, pour l'équation de toutes les lignes du second ordre admettant les quatre premiers points,

$$\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_3}-1\right)\left(\frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_4}-1\right)+\lambda xy=0 \quad (3,$$

et, pour équation de condition indiquant la position du point (x_5, y_5),

$$\left(\frac{x_5}{x_1}+\frac{y_5}{y_3}-1\right)\left(\frac{x_5}{x_2}+\frac{y_5}{a_4}-1\right)+\lambda x_5 y_5=0 \quad (4;$$

et par suite, en éliminant λ entre ces deux fonctions,

$$x_5y_5\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_3}-1\right)\left(\frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_4}-1\right)-\left(\frac{x_5}{x_1}+\frac{y_5}{y_3}-1\right)\left(\frac{x_5}{x_2}+\frac{y_5}{y_4}-1\right)xy=0 \quad (\varphi),$$

ou l'équation demandée.

Les relations (1) et (2) et même celles (3) et (4) sont assez longues à écrire, aussi peut-on abréger par des notations convenables. En effet, soient, les axes étant quelconques,

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0 \quad et \quad D=0$$

les équations de quatre droites passant par quatre des points précédents, pris deux à deux,

$$AB+\lambda CD=0 \quad (5)$$

sera, λ étant une indéterminée, l'équation demandée.

Ceci posé, appelons A', B', C' et D' ce que deviennent A, B, C et D en y remplaçant x et y par x_5 et y_5, nous aurons

$$A'B'+\lambda C'D'=0 \quad (6);$$

d'où, en éliminant λ entre (5) et (6), pour le lieu

$$C'D'AB=A'B'CD \ldots \quad (\varphi).$$

COROLLAIRE. De la forme (§ 14, *Prob. IX*) de la distance d'un point à une droite, il résulte que A, B, C et D peuvent être considérés comme les distances d'un point quelconque (x, y) aux côtés du quadrilatère inscrit dans une section conique, et comme (φ) donne

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}=constante$$

on en déduit ce théorème : *le produit des distances d'un point quelconque d'une section conique à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit, est au produit des distances de ce même point aux deux autres côtés dans un rapport constant.*

N. B. Le lieu du centre de toutes les courbes caractérisées par (5) s'obtiendrait en éliminant λ entre les dérivées de (5), prises successivement par rapport à x et par rapport à y.

PROBLÈME II.

Déterminer la parabole passant par quatre points donnés.

Nous avons trouvé (§ 231, *Théor. I*, *Corol. II*), pour l'équation de toutes les courbes du second ordre passant par quatre points donnés,

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\lambda\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)+\lambda xy=0 \quad (1).$$

Or, (1) sera une parabole si les termes du second degré forment un carré parfait, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\left(\lambda+\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)^2-\frac{4}{aba'b'}=0 \quad (2);$$

donc. en éliminant λ entre (1) et (2), on obtiendra la parabole demandée.

DISCUSSION. Le produit $aba'b'$ NÉGATIF, donnant pour λ des expressions imaginaires, indiquera qu'aucune parabole ne pourra passer par les points donnés; tandis que si le même produit est POSITIF, deux paraboles seront possibles. Dans le premier cas, le quadrilatère des quatre points sera *concave* et *convexe* dans le second.

PROBLÈME III.

Quel est le lieu du centre des courbes du second ordre circonscrites à un triangle et passant par un point donné?

Soient

$$\alpha=0, \quad \beta=0 \quad et \quad \gamma=0$$

les équations des trois côtés du triangle; nous aurons, pour toutes ces courbes

$$\lambda\alpha\beta+\mu\alpha\gamma+\nu\beta\gamma=0 \quad (1);$$

et, à cause de la situation du point donné,

$$\lambda\alpha'\beta'+\mu\alpha'\gamma'+\nu\beta'\gamma'=0 \quad (2).$$

Donc, si on éliminait λ, μ et ν entre (2) et les dérivées par rapport à x et par rapport à y de (1), on obtiendrait le lieu demandé.

N. B. Nous ferons de nouveau observer au lecteur que lorsque les conditions géométriques imposées à la courbe du second ordre, sont au nombre de quatre seulement, il existe une infinité de lignes satisfaisant à ces conditions, et alors on peut se proposer de trouver le lieu géométrique d'un point remarquable de toutes ces courbes, ou le lieu de tout autre point convenablement défini. Pour résoudre ces problèmes, qui ne sont que des cas particuliers de la théorie déjà exposée (LEÇON VI), après avoir introduit les quatre exigences géométriques dans l'équation de la courbe ne laissant plus qu'une constante arbitraire, on élimine cette dernière au moyen des relations donnant les coordonnées du point remarquable indiqué.

PROBLÈME IV.

Quelle est la courbe du second ordre tangente à deux droites données en des points donnés et passant par un autre point donné.

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$ les équations des deux tangentes et $\gamma = 0$ celle de la droite des points de contacts; nous aurons d'abord

$$\alpha\beta + \lambda\gamma^2 = 0 \qquad (1),$$

λ étant une constante indéterminée. D'un autre côté, le lieu devant passer par le point (x', y'), on aura

$$\alpha'\beta' + \lambda\gamma'^2 = 0 \qquad (2);$$

d'où, en éliminant λ,

$$\gamma'^2\alpha\beta = \alpha'\beta'\gamma^2 \qquad (\varphi);$$

c'est-à-dire, comme (1), une courbe du second ordre.

COROLLAIRE. λ étant une constante, (1) indique : *que le produit des distances d'un point quelconque d'une section conique à deux tangentes est au carré de la distance de ce point à la corde des contacts* ($\gamma = 0$) *dans un rapport constant.*

PROBLÈME V.

Trouver le lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote et un foyer communs (fig. 176).

Prenons l'asymptote pour axe des Y et la perpendiculaire abaissée du foyer sur l'asymptote pour axe des abscisses; nous aurons (o, d) étant le foyer,

$$y^2 + (x - d)^2 - (\mu y + \nu x + \pi)^2 = 0 \qquad (1),$$

pour toutes ces hyperboles; toutefois comme l'axe des ordonnées est une asymptote, pour $x = 0$, on doit avoir deux racines infinies pour y, d'où

$$1 - \mu^2 = 0 \quad et \quad \pi = 0;$$

et par suite (1) est réduit à

$$y^2 + (x - d)^2 - (\pm\, y + \nu x)^2 = 0 \qquad (2).$$

Soit (α, β) les coordonnées d'un sommet d'une des hyperboles (2), nous aurons

$$\beta^2 + (\alpha - d)^2 - (\pm\, \beta + \nu\alpha)^2 = 0 \qquad (G);$$

et, comme la droite des points (α, β) et $(0, d)$ doit être perpendiculaire à la directrice, il vient

$$\frac{\beta}{\alpha - d} = \pm\, \frac{1}{\nu} \cdots \qquad (G').$$

Ainsi (G) et (G') constituent les génératrices du point cherché, avec ν comme *constante variable;* et par suite, en éliminant ν,

$$\beta^2 (\alpha^2 - d^2) + \alpha^2 (\alpha - d)^2 = 0;$$

c'est-à-dire la fonction déjà trouvée (page 366) par un procédé distinct du précédent.

PROBLÈME VI.

Trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles ayant même directrice et un point commun [fig. 134, 1)].

Prenons pour axes coordonnés la directrice et la perpendiculaire passant par le point donné (0, d); nous avons, pour l'équation générale de toutes ces paraboles,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(\mu y+\nu x+\pi)^2=0 \quad (1),$$

avec la relation

$$\mu^2+\nu^2=1 \ldots \quad (2).$$

L'axe des Y étant la directrice $\mu y+\nu x+\pi=0$, on a $x=0$ pour cette droite, donc (1) devient

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-x^2=0 \ldots \quad (3)$$

car $\nu=1$, par suite de $\mu=0$ et $\pi=0$.

Or, (3) devant passer par le point (d, 0), on aura, pour le lieu demandé,

$$(d-\alpha)^2+\beta^2=d^2 \ldots \quad (\varphi)$$

Relation identique à celle que donneraient les considérations géométriques données à la page 292.

PROBLÈME VII.

Trouver la courbe du second ordre ayant un foyer commun F et passant par trois points donnés M, M' et M''.

Prenons F pour origine et soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les points donnés, nous aurons, pour cette courbe,

$$x^2+y^2-(\mu y+\nu x+\pi)^2=0 \quad (1);$$

et, pour déterminer μ, ν et π,

$$\mu y'+\nu x'+\pi=\sqrt{x'^2+y'^2}=\pm\delta',$$
$$\mu y''+\nu x''+\pi=\sqrt{x''^2+y''^2}=\pm\delta'',$$
$$\mu y'''+\nu x'''+\pi=\sqrt{x'''^2+y'''^2}=\pm\delta'''.$$

DISCUSSION. Les seconds membres de ces trois relations donnent *huit* combinaisons, mais réductibles à *quatre* : En effet, (1) ne subit aucune altération en changeant μ, ν et π en $-\mu$, $-\nu$ et $-\pi$, il en résulte que si après avoir pris tous les seconds membres avec certains signes, on les prend avec des signes opposés, on aura le même système. Ainsi il ne reste qu'à examiner les quatre cas suivants :

I. δ', δ'' et δ''' *positifs*. Dans ce cas, les coordonnées des points M', M'', M''' substituées dans le premier membre de la directrice

$$\mu y+\nu x+\pi=0$$

donnent des résultats de même signe. Les trois points sont donc du même côté de la directrice; et alors :

$\pi > 0$, place les trois points et le foyer d'un même côté de la directrice; et la courbe peut être *Elliptique*, *Parabolique* ou *Hyperbolique*.

$\pi < 0$, indique que les points et le foyer sont de part et d'autre de la directrice; et la solution ne peut être qu'une *Hyperbole*.

II. $\delta' > 0$, $\delta'' > 0$ et $\delta''' < 0$;
III. $\delta' > 0$, $\delta'' < 0$ et $\delta''' > 0$;
IV. $\delta' > 0$ $\delta'' < 0$ et $\delta''' < 0$;
Dans chacun de ces cas, il y aura deux points d'un côté de la directrice et le troisième de l'autre côté. Donc une *hyperbole*.

Ainsi le problème admet, en général, *quatre solutions*, parmi lesquelles se trouvent au moins *trois hyperboles*.

REMARQUE. Ce problème a une grande importance en astronomie, où il sert à déterminer la trajectoire d'une planète en fonction de trois positions de l'astre.

N. B. Ce problème a déjà été résolu géométriquement à la page 96 (fig. 78 et 79).

THÉORÈME I.

Lorsque deux sections coniques sont doublement tangentes à une troisième, deux sécantes communes passent par le point de rencontre des cordes de contact.

Soit $S = 0$ une courbe du second ordre; $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$ les équations de ses cordes de contact avec $S_1 = 0$ et $S_2 = 0$; ces dernières seront évidemment

$$S - \lambda\gamma^2 = 0 \quad \text{et} \quad S - \lambda'\gamma'^2 = 0;$$

d'où, en combinant ces relations par voie de soustraction,

$$\lambda\gamma^2 - \lambda'\gamma'^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma = \pm\, \gamma' \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}$$

pour les cordes *réelles* ou *imaginaires* des intersections de S_1 et S_2 : et ces cordes sont vérifiées par

$$\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \gamma' = 0.$$

THÉORÈME II.

Si on coupe une courbe du troisième ordre par une droite quelconque $\beta = 0$, les tangentes aux points d'intersection coupent la courbe en des points qui sont en ligne droite.

D'abord α, α', α'', β et γ désignant des fonctions entières du premier degré en x et y, et λ une constante indéterminée, nous aurons

$$\alpha\alpha'\alpha'' - \lambda\beta^2\gamma = 0$$

pour l'équation générale du troisième degré à deux variables, car elle contient onze constantes; on peut même prendre à volonté *une* des fonctions linéaires.

Or, les droites

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = 0 \quad \text{et} \quad \alpha'' = 0,$$

sont tangentes à la courbe pour la sécante à volonté

$$\beta = 0;$$

et les points où ces droites coupent

$$\gamma = 0$$

appartiennent aussi à la courbe. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. En prenant γ à volonté, on en déduit : *si par chacun des points d'intersection d'une courbe du second degré avec une sécante $\gamma = 0$, on trace des tangentes à la courbe, les points de contact de ces tangentes sont trois à trois en ligne droite.*

THÉORÈME III.

Si on coupe une courbe du quatrième degré par une droite quelconque et qu'aux intersections on mène des tangentes, les huit autres points de rencontre de ces tangentes avec la courbe seront sur une section conique.

Ce théorème résulte de ce que toute équation du quatrième degré peut être mise sous la forme

$$\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\text{IV}} - \lambda\beta^2\varphi = 0,$$

φ étant un polynôme du second degré à deux variables et qu'on peut prendre β à volonté puisqu'il reste encore 14 constantes.

N. B. Les deux théorèmes précédents sont extraits d'un traité de géométrie analytique par MM. Briot et Bouquet.

Exercices.

1° Quel est le lieu des sommets des paraboles tangentes à trois données?

2° Quel est le lieu des foyers des hyperboles ayant un même sommet et une asymptote commune.

3° Quel est le lieu des centres des ellipses ayant un sommet commun et deux tangentes communes perpendiculaires entre elles.

4° Si d'un point extérieur on mène des tangentes à une courbe du second ordre, ces deux tangentes sont également inclinées sur les droites allant du point donné aux deux foyers.

FIN.

